UPPGIFT 13.6

Betrakta följande heltalsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & 6 \\
& & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

Vi vet att LP-relaxationen har optimallösningen $x_1 = 0{,}375$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1{,}75$ och $z = 7{,}125$.

a) Antag att $x_2 = 0$ i optimala heltalslösningen, och lös färdigt problemet under den förutsättningen med Land-Doig-Dakins metod.

b) Använd informationen från uppgift a för att finna och/eller verifiera korrekt optimal heltalslösning. (Optimalitet ska vara bevisad.) Ledning: Använd valda delar av Balas metod.

UPPGIFT 13.7

a) Lös nedanstående kappsäcksproblem med en optimerande trädsökningsmetod.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & & \\
\text{då} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & \leq & 7 \\
& & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}} & &
\end{array}
$$

b) Lös ovanstående problem med dynamisk programmering.

UPPGIFT 13.8

a) Utför förbearbetning, genom att ta bort uppenbart otillåtna respektive inte optimala möjligheter från följande problem. (Ledning: några variabler kommer att kunna elimineras.)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & & \\
\text{då} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & \leq & 2 \\
& & & \multicolumn{7}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}} & & &
\end{array}
$$

b) Lös problemet med optimerande trädsökning. Resultatet i uppgift a) får givetvis användas.

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Resultatet i uppgift a) får användas.

UPPGIFT 13.9

Betrakta nedanstående heltalsproblem.

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{då} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & 11 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0, \text{heltal} \end{array}$$

a) Lös problemet med en exakt trädsökningsmetod.

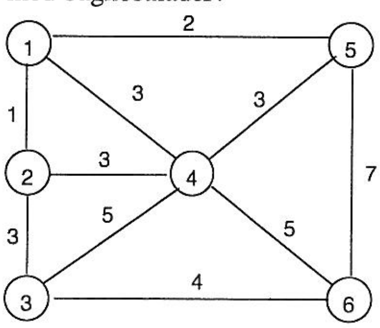
b) Lös ovanstående problem med dynamisk programmering.

UPPGIFT 13.10

Lös uppgift 3.1 med $b = 23$ och 4 föremål med värdevektorn $c = (18, 14, 8, 4)$, med massa-vektorn $a = (15, 12, 7, 4)$, då högst 1 enhet av varje föremål ska medföras.

UPPGIFT 13.11

Är handelsresandeturen $1 - 2 - 3 - 6 - 4 - 5 - 1$ optimal i följande oriktade graf med bågkostnader?



UPPGIFT 13.12

Lös följande problem med hjälp av Land-Doig-Dakins metod. Använd gärna en avrundningsheuristik för att försöka få tillåtna heltalslösningar.

$$\begin{array}{llrcrcl} \max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{då} & & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 7 \\ & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & , & x_2 & \in & \{0, 1, 2\} \end{array}$$

trädet är avsökt. Vi har alltså $x_1 = 0$, $x_3 = 2$ och $z = 6$ som bästa lösning om $x_2 = 0$.

b) Eftersom vi undersökt fallet $x_2 = 0$ i uppgift a, återstår bara fallet $x_2 \geq 1$. (Bivillkor 1 ger $x_2 \leq 1$ och bivillkor 2 ger $x_1 \leq 1$.) Sätt in $x_2 = 1$. Bivillkor 1 ger $x_3 = 0$ och bivillkor 2 ger $x_1 = 0$. Därefter är lösningen fixerad, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ vilket ger $z = 3$. Detta är sämre än lösningen i uppgift a, så optimum är säkert lösningen i uppgift a.

SVAR 13.7

a) Kvoter: $c_1/a_1 \approx 0{,}67$, $c_2/a_2 = 0{,}75$, $c_3/a_3 = 0{,}8$, $c_4/a_4 = 0{,}6$.
P0: $x_1 = 0, x_2 = 0{,}5, x_3 = 1, x_4 = 0, z = 5{,}5$, ger $\bar{z} = 5$. Avrundning ger tillåten lösning $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, z = 4$, vilket ger $\underline{z} = 4$. Förgrena över x_2.
P2: $(x_2 \geq 1)$: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0{,}6, x_4 = 0, z = 5{,}4$, ger $\bar{z} = 5$. Avrundning ger tillåten lösning $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, z = 3$, vilket inte ger bättre $\underline{z}$. Förgrena över x_3.
P4: $(x_2 \geq 1), (x_3 \geq 1)$: Saknar tillåten lösning. Kapa.
P3: $(x_2 \geq 1), (x_3 \leq 0)$: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, z = 5$, tillåten heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 5$. Kapa.
P1: $\bar{z} = 5$ från P0 och $\underline{z} = 5$. Kapa.
Trädet avsökt. Optimum: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, z = 5$.
b) Steg 1 är trivialt. Steg 2 och 3 är som följer.

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	2	2	2	2	2
1	-	-	-	-	3	3	3	5
$f_2(s_2)$	0	0	0	2	3	3	3	5
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	1	1	1	1	1

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	2	3	3	3	5
1	-	-	-	-	-	-	3	4
$f_3(s_3)$	0	0	0	2	3	3	4	5
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	0	0	1	0

Steg 4 för $s_4 = 7$ ger $f_4(7) = 5$ och $\hat{x}_4(7) = 0$.

SVAR 13.8

a) Resultat: $x_2 = 1$ (tjänar både i målfunktion och bivillkor), $x_4 = 0$ (förlorar både i målfunktion och bivillkor), $x_5 = 0$ (får inte plats).
Kvar: $\max z = 3x_1 + 2x_3 + 2$ då $2x_1 + 2x_3 \leq 3$, $x_1, x_3 \in \{0, 1\}$
b, c) Optimallösning: $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ och $z = 5$.

SVAR 13.9

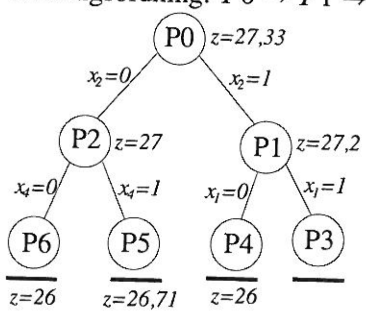
a) Optimallösning: $x_1 = 0, x_2 = 2$ och $x_3 = 1$ med $z = 13$.
b) Vi får trivialt $f_1 = (0, 0, 0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6)$ och sedan

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	2	2	2	4	4	4	6	6	6
1	-	-	-	-	5	5	5	7	7	7	9	9
2	-	-	-	-	-	-	-	-	10	10	10	12
$f_2(s_2)$	0	0	0	2	5	5	5	7	10	10	10	12
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2

och därefter $f_3(11) = 13$ för $\hat{x}_3(11) = 1$.

SVAR 13.10

$\max z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$ då $15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4x \leq 23, x \in \{0, 1\}^4$.
Lösningsordning: $P0 \to P1 \to P3 \to P4 \to P2 \to P5 \to P6$.



Optimallösningen ges av $x = (1, 0, 1, 0)$ vilket ger $z = 26$. Packa ned föremål 1 och 3, vilka ger värdet 26.

SVAR 13.11

Ja, turen är optimal. Bevisas med trädsökning.

SVAR 13.12

P0: LP-optimum: $x_1 = 7/4, x_2 = 0, \bar{z} = 21/4 = 5{,}25$. Avrundning nedåt ger tillåten lösning: $x_1 = 1, x_2 = 0, \underline{z} = 3$. Förgrena över x_1: Bilda P1: P0 + $(x_1 \leq 1)$, och P2: P0 + $(x_1 \geq 2)$. Gå ner i $\geq$-grenen först. P2 saknar tillåten lösning. Kapa.
P1: $x_1 = 1, x_2 = 3/5, \bar{z} = 21/5 = 4{,}2$. Förgrena över x_2: Bilda P3: P1 + $(x_2 \leq 0)$, och P4: P1 + $(x_2 \geq 1)$. P4: $x_1 = 1/2, x_2 = 1, \bar{z} = 3{,}5$. Nu är $\lfloor \bar{z} \rfloor = 3 = \underline{z}$, så denna gren kan inte ge någon bättre lösning än den vi redan har. Kapa.
P3: $x_1 = 1, x_2 = 0, \bar{z} = 3$. Här är $\bar{z} = 3 = \underline{z}$. Kapa.
Trädet är avsökt. Optimallösning: $x_1 = 1, x_2 = 0$ och $z = 3$.