

Innehåll: Maxwells ekvationer

I detta avsnitt ska vi kortfattat diskutera Maxwells ekvationer i elektrodynamiken. I vakuum, men i närvaro av elektriska laddningar och elektriska strömmar, har dessa utseendet

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \partial_t B, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c} \partial_t E + \frac{4\pi}{c} J, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (4)$$

(CGS enheter). Här är $E(x, t)$ och $B(x, t)$, för fixt t , vektorfält i rummet som anger det elektriska respektive magnetiska flödet vid tiden t . $\rho(x, t)$ betecknar laddningstätheten i punkten x vid tiden t och $J(x, t)$ är strömtätheten, d.v.s. en vektor som anger den elektriska strömmens riktning och styrka per areaenhet vinkelrätt mot strömmens riktning. Konstanten c är ljushastigheten i vakuum.

Eftersom $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ så ger ekvationen (2) att

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} B = \frac{1}{c} \partial_t (\operatorname{div} E) + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} J.$$

Om vi här sätter in uttrycket (3) för $\operatorname{div} E$ får man

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} J = 0. \quad (5)$$

Detta samband mellan ρ och J måste alltså gälla för att ekvationerna (2) och (3) ska vara förenliga med varandra. Ekvationen (5) svarar mot kontinuitetsekvationen för en strömmande gas eller vätska.

Betrakta först det stationära fallet, när E, B, J och ρ är oberoende av t . Ekvationerna (1) och (3) blir då

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} E = 4\pi\rho.$$

Den första av dessa innebär att E lokalt är ett potentialfält $E = \nabla V$, medan den andra ekvationen innebär att

$$\int_{\partial\Omega} (E|N) dS = 4\pi \int_{\Omega} \rho dx dy dz.$$

Man kan lösa de två ekvationerna och får då att

$$E(x) = \int \frac{\rho(y)(x-y)}{|x-y|^3} dy,$$

vilket är *Coulombs lag* från elektrostatiken.

Ekvationerna (2) och (4) blir

$$\operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} J, \quad \operatorname{div} B = 0. \quad (6)$$

Stokes' sats på den första ekvationen i (6). För ett ytstycke Σ får vi att

$$\int_{\gamma} (B|T) ds = \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma} (J|N) dS. \quad (7)$$

Vänsterledet kallas cirkulationen av B längs γ och formeln kallas Ampères cirkulationslag. Den beskriver hur det magnetiska fältet bestäms av den inneslutna strömmen. Tillsammans med kravet att $\operatorname{div} B = 0$ (som uttrycker frånvaron av magnetiska monopoler) bestämmer (7) det stationära magnetiska fältet B som

$$B(x) = \frac{1}{c} \int \frac{J(y) \times (x-y)}{|x-y|^3} dy.$$

Denna formel kallas *Biot-Savarts lag*.

Det var Ørsted som upptäckte att en elektrisk ström inducerar ett magnetfält. En närmare analys av detta fenomen ledde till Ampères cirkulationslag. Det var naturligt att fråga sig om omvändningen gällde, d.v.s. om ett magnetfält kunde inducera en ström i en ledare. Faraday fann att det var inte statiska utan variabla magnetfält som gav upphov till magnetiska strömmar. I precis matematisk form säger *Faradays induktionslag* att

$$\int_{\gamma} (E|T) ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} (B|N) dS. \quad (8)$$

(Här har vi använt samma beteckningar som i (7).) Vänsterledet i (8) betecknar spänningsfallet då man går ett varv runt γ , d.v.s. det arbete som utförs då en positiv enhetsladdning transporteras ett varv runt γ . Om γ är en ledande slinga, så säger Faradays induktionslag att ändring i det magnetiska flödet genom Σ ger upphov till elektrisk ström i γ orsakad av spänningsfallet i vänsterledet av (8). Eftersom ytstycket Σ i (8) är godtyckligt, så följer av Stokes' sats att (8) är ekvivalent med differentialekvationen (1).

Den sista byggstenen i Maxwells ekvationer är termen $\partial_t E$ i högerledet av (2). Att det krävs en tilläggsterm följer av ekvation (5). Om $\partial_t \rho \neq 0$ blir inte $\operatorname{div} J = 0$ och eftersom $\operatorname{div} \operatorname{rot} B = 0$ måste man ha något mer än $\frac{4\pi}{c} J$ i högerledet av (2). Det var Maxwell som angav den fullständiga ekvationen (2).