Föreläsning 18

Innehåll: Gauss och Stokes satser i 3D

Kapitel 10.2–10.3

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- vad Stokes sats säger och vad rotationen av ett vektorfält är för något
- vad Gauss' sats säger och vad divergensen representerar

Introduktion

Vi har sett att vi i planet har följande två integralsamband för ett plant vektorfält $u = (u_1, u_2)$:

Greens formel:

$$\int_{\partial\Omega} (u|T)ds = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u)dxdy,$$

där

$$\operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1.$$

Här blir

$$(u|T)ds = u_1 dx + u_2 dy.$$

T är kurvans enhetstangent när vi genomlöper randen i positiv omloppsriktning.

Gauss' sats:

$$\int_{\partial\Omega} (u|N)ds = \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)dxdy,$$

där

$$\operatorname{div} u = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2.$$

N är den enhetsnormal på randen som pekar ut från området.

I planet är detta samma sats, men de generaliseras till två olika satser i rummet.

Anmärkning Jag skriver alla integraler med enkla integraltecken denna gång. Sammanhanget får avgöra om det är en enkel-, dubbel- eller trippelintegral.

Gauss' sats i rummet

...ser likadan ut som i planet och har samma tolkning:

$$\int_{\partial\Omega} (u|N)dS = \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)dxdydz,$$

Nu gäller att $u = (u_1, u_2, u_3)$ och

$$\operatorname{div} u = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3.$$

N är den enhetsnormal på randen $\partial\Omega$ (som är en yta) som pekar ut från Ω.

Det är lätt att tro på denna sats av rent fysikaliska skäl, så vi ger inget fullständigt bevis. Däremot visar följande exempel en viktig komponent av ett bevis.

Exempel Vi ska visa Gauss' sats om Ω är enhetskuben $0 \le x, y, z \le 1$.

Kuben har tre par av motstående sidor. Låt Σ_+ vara den som svarar mot $z = 1$ och Σ_- den som svarar mot $z = 0$. På Σ_+ har vi att $N = (0, 0, 1)$ och på Σ_- att $N = (0, 0, -1)$. Vi har därför

$$\int_{\Sigma_+} (u|N)dS + \int_{\Sigma_-} (u|N)dS = \int_{\Sigma_+} u_3 dS - \int_{\Sigma_-} u_3 dS =$$

$$\int_D (u_3(x, y, 1) - u_3(x, y, 0))dxdy,$$

där D är kvadraten $0 \le x, y \le 1$. Men här gäller att

$$u_3(x, y, 1) - u_3(x, y, 0) = \int_0^1 \partial_3 u_3(x, y, z)dz,$$

så integralen till höger är lika med

$$\int_{\Omega} \partial_3 u_3(x, y, z)dxdydz.$$

Tittar vi på andra sidor parvis och samma räkningar får vi tre liknande resultat som när vi summerar dem innebär att vi visat satsen.

Liksom i planet får divergensen tolkningen av en källtäthet, och man säger att ett vektorfält är källfritt om dess divergens är noll. Ett exempel är en punktkälla i origo.

Exempel Låt

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^3)^{3/2}}(x, y, z), \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

representera en punktkälla i origo. Vi har att

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^3)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^3)^{3/2}} - \frac{1}{3} \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^3)^{5/2}},$$

från vilket vi ser att

$$\operatorname{div} u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Det betyder att om Ω är ett område som inte innehåller origo (ej heller får origo ligga på randen), så gäller att

$$\int_{\partial\Omega} (u|N)dS = 0.$$

Lika mycket flödar in som flödar ut!

Om emellertid origo ligger i området kan vi tar bort ett litet klot B_ϵ med centrum i origo. På det som är kvar har vi då att

$$\int_{\partial(\Omega \setminus B_\epsilon)} (u|N)dS = 0.$$

Här gäller att $\partial(\Omega \setminus B_\epsilon) = \partial\Omega + \partial B_\epsilon$ och den utåtriktade normalen på ∂B_ϵ pekar in mot origo (eftersom den är normal till Ω). Det följer att

$$\int_{\partial(\Omega \setminus B_\epsilon)} (u|N)dS = \int_{\partial\Omega} (u|N)dS - \int_{\partial B_\epsilon} (u|N)dS,$$

där nu N pekar ut från respektive område. Eftersom detta är noll får vi att (med $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

$$\int_{\partial\Omega} (u|N)dS = \int_{\partial B_\epsilon} (u|N)dS = \int_{r=\epsilon} \Big(\frac{1}{\epsilon^3}(x, y, z)\Big|\frac{1}{\epsilon}(x, y, z)\Big)dS =$$

$$\frac{1}{\epsilon^4} \int_{r=\epsilon} \epsilon^2 dS = \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = 4\pi.$$

Exempel Betrakta en gas (eller en vätska) som rör sig i ett område i rummet. Låt $u(x, t)$ och $\rho(x, t)$ vara strömningshastighet respektive tätheten av gasen i punkten $x = (x_1, x_2, x_3)$ vid tiden t. Låt B vara ett godtyckligt klot i det område där gasen strömmar. Den totala gasmassan i B vid tiden t ges då av

$$M(t) = \int_B \rho(x, t)dx \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

och $M'(t)$ blir massökningen (som kan vara negativ) i B per tidsenhet. Om vi förutsätter att ingen gas nybildas eller ombildas till något annat, så beror ökningen endast på inströmning av gas i B över randen ∂B. Om N betecknar den utåtriktade normalen på ∂B, så mäter integralen

$$-\int_{\partial B} (\rho(x,t)u(x,t)|N(x))\, dS$$

den mängd gas som strömmar in i B per tidsenhet. Vi har alltså att

$$\frac{d}{dt}\int_B \rho(x,t)dx = -\int_{\partial B} \rho(x,t)(u(x,t)|N(x))\, dS.$$

Om vi tar in tidsderivatan i vänsterledet under integraltecknet och använder Gauss' sats på integralen i högerledet får vi

$$\int_B \partial_t \rho(x,t)dx = -\int_B \operatorname{div}_x(\rho(x,t)u(x,t))dx.$$

Eftersom detta ska gälla för varje klot B följer att

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0.$$

Denna ekvation kallas *kontinuitetsekvationen* för en strömmande gas (eller vätska).

Stokes sats och rotationen

Låt M vara ett plan i rummet och Σ en öppen delmängd av M som begränsas av en enkel, sluten C^1 kurva $\partial\Sigma$. Orientera planet M genom att fixera en enhetsnormal N till det. Orientera vidare randen $\partial\Sigma$ så att den genomlöps i positiv omloppsriktning sett från spetsen av N. Om T är enhetstangenten till $\partial\Sigma$ i rörelsens riktning och u är ett vektorfält i rummet, så gäller att

$$\int_{\partial\Sigma} (u|T)ds = \int_\Sigma \operatorname{div}(u \times N)dS. \tag{1}$$

Bevis. Formeln beror inte av positivt orienterat ON-system i rummet. Låt Oe_1e_2 vara ett ON-system i planet M sådant att $e_1 \times e_2 = N$. Då blir Oe_1e_2N ett positivt orienterat ON-system i rummet. Låt $x = (x_1, x_2, x_3)$ vara motsvarande koordinater. Greens formel säger då att

$$\int_{\partial\Sigma} (u|T)\, ds = \int_{\partial\Sigma} u_1(x)dx_1 + u_2(x)dx_2 = \int_\Sigma (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)dx_1 dx_2.$$

Men $u \times N = u \times (0,0,1) = (u_2, -u_1, 0)$ i basen e_1e_2N, så $\operatorname{div}(u \times N) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$. □

Betrakta nu ett allmänt positivt orienterat ON-system i rummet. Då kan integranden i högerledet av (1) skrivas

$$\operatorname{div}(u \times N) = N_1 \operatorname{div}(u \times e_1) + N_2 \operatorname{div}(u \times e_2) + N_3 \operatorname{div}(u \times e_3).$$

Här gäller t.ex. att $\operatorname{div}(u \times e_1) = \operatorname{div}(0, u_3, -u_2) = \partial_3 u_3 - \partial_3 u_2$. Detta motiverar följande definition.

Definition Rotationen det $\operatorname{rot} u$ av vektorfältet $u = (u_1, u_2, u_3)$ definieras som vektorfältet

$$\operatorname{rot} u = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1). \tag{2}$$

Eftersom $\operatorname{div}(u \times N) = (\operatorname{rot} u|N)$ har vi visat att om M är ett plan i rummet med enhetsnormal N och Σ en öppen delmängd av M med styckvis C^1-rand $\partial\Sigma$, orienterad så att den genomlöps i positiv omloppsriktning sett från spetsen av N, så gäller att

$$\int_{\partial\Sigma} (u|T)\, ds = \int_\Sigma (\operatorname{rot} u|N)\, dS. \tag{3}$$

Anmärkning Man kan minnas formel (2) genom att observera att högerledet formellt kan skrivas som en vektorprodukt

$$\operatorname{rot} u = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \times (u_1, u_2, u_3).$$

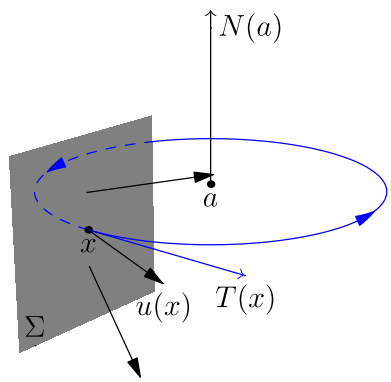
På motsvarande sätt kan divergensen skrivas som en skalärprodukt

$$\operatorname{div} u = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \cdot (u_1, u_2, u_3).$$

Vi ska nu titta lite närmare på innebörden av $\operatorname{rot} u$. Låt M vara ett plan med enhetsnormal N som går genom punkten x^0 och låt B_r vara cirkelskivan $\{x \in M; |x - x^0| < r\}$ i planet M. Eftersom arean av B_r är πr^2, så ger (3) att

$$(\operatorname{rot} u(x^0)|N) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r} (\operatorname{rot} u|N)\, dS = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2}\int_{\partial B_r} (u|T)\, ds. \tag{4}$$

Betrakta integralen i högerledet. Låt x vara en punkt på cirkelperiferin ∂B_r och lägg ett litet ytstycke Σ genom x ortogonalt mot ∂B_r. Om vi uppfattar u som strömningshastighet för en vätska, så mäter $(u(x)|T(x))$ hur mycket vätska som strömmar igenom Σ per area- och tidsenhet. Att gränsvärdet i högerledet av (4) är skilt från noll betyder att det finns ett inslag av virvelrörelse i vätskeströmningen. Om $\operatorname{rot} u(x^0) \neq 0$ så är vänsterledet i (4) störst då N har samma riktning som $\operatorname{rot} u(x^0)$. Man kan alltså uppfatta riktningen av $\operatorname{rot} u(x^0)$ som rotationsaxel för virvelrörelsen. Längden av $\operatorname{rot} u(x^0)$ är ett mått på virvelns styrka.



Anmärkning Om det gäller att $\operatorname{rot} u = 0$ säger man att vektorfältet är virvelfritt.

Följande exempel belyser ytterligare denna fysikaliska tolkning.

Exempel Låt punkterna i rummet rotera runt en axel med riktningsvektorn N, där $|N| = 1$, med konstant fart så att ett varv tar τ tidsenheter. Antag att rotationen sker moturs sett från spetsen av N. Då ges rotationshastigheten $u(x)$ i punkten x av

$$u(x) = \omega \times x,$$

där $\omega = \frac{2\pi}{\tau}N$. Vi vill beräkna $\operatorname{rot} u(x)$. Vi kan då anta att $N = (0,0,1)$, och då blir $N \times x = (-x_2, x_1, 0)$ och $\operatorname{rot}(N \times x) = 2N$. Det följer att $\operatorname{rot} u(x) = \operatorname{rot}(\omega \times x) = 2\omega$, d.v.s.

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} u(x).$$

Formeln (3) gäller även då Σ är ersatt av en allmänn kompakt orienterad yta M med en styckvis C^1-rand.

Sats (Stokes' sats) *Låt M vara en kompakt orienterad yta i rummet och u ett C^1 vektorfält i en omgivning av M. Då gäller att*

$$\int_{\partial M} (u|T)\, ds = \int_M (\operatorname{rot} u|N)\, dS.$$

förutsatt att randen genomlöps i positiv omloppsriktning.

Notera speciellt i Sats 1 att om M är en orienterad yta *utan* rand, så gäller att

$$\int_M (\operatorname{rot} u|N)\, dS = 0.$$

Speciellt gäller för en godtycklig öppen, begränsad, delmängd Ω av rummet med C^1 rand och vektorfält $u(x)$ att (Gauss' sats)

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\operatorname{rot} u)dx = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot} u|N)\, dS = 0.$$

Då detta är sant för t.ex. alla klot följer att

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = 0.$$

Man kan naturligtvis också verifiera detta direkt genom uträkning. Det finns fler samband mellan vektoranalysoperationerna div, rot och ∇. Ett är $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$. Kan du tänka ut varför med hjälp av Stokes sats?