

Innehåll: Ytintegraler

Kapitel 6.5 (s213–216), 8.4, 10.1

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- vad som menas med reguljära och orienterade ytor.
- vad som menas med en ytintegral
- flödesintegraler i rummet

Lite om kurvintegraler i rummet

Kurvintegraler i rummet skiljer sig väldigt lite ifrån de planet, tills vi kommer till Greens sats. Men innan dess har vi samma definitioner. Om

$$\omega = u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz$$

så sägs ω vara exakt om $\omega = dF$. Om en sådan funktion F finns, så måste de blandade andraderivatorna vara lika, vilket innebär att (där $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ etc)

$$\partial_2 u_1 = \partial_1 u_2, \quad \partial_3 u_1 = \partial_1 u_3, \quad \partial_2 u_3 = \partial_3 u_2.$$

När ω är sådan att dessa tre villkor gäller sägs ω vara sluten. Vi har alltså då att om ω är exakt är den sluten. Liksom i planet (med samma bevis) har vi att ω är exakt om och endast om integralen är oberoende av vägen.

Ytor (6.5)

Ett ytstycke är en mängd

$$\Sigma = \{\psi(t_1, t_2) : (t_1, t_2) \in D\}$$

där $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ är injektiv och dess partiella derivator $\partial_1 \psi, \partial_2 \psi$ är linjärt oberoende. Vi antar också att D är ett reguljärt område (se boken), vilket speciellt betyder att dess rand är styckvis C^1 . Randens $\partial \Sigma$ till ytan är bilden av randen ∂D .

Exempel Låt $D = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ och definiera

$$\psi(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Då gäller att motsvarande ytstycke är nästan enhetssfären. Notera att vi har att

$$\partial_\theta \psi = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

$$\partial_\phi \psi = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$$

Exempel En funktionsyta $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ kan parametreras med

$$\psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

för vilken vi har

$$\partial_x \psi(x, y) = (1, 0, \partial_x f(x, y)),$$

$$\partial_y \psi(x, y) = (0, 1, \partial_y f(x, y)).$$

Ett ytstycke har två sidor, definierade av de två enhetsnormalerna $((x, y, z) = \psi(t_1, t_2))$

$$N(x, y, z) = \pm \frac{\partial_1 \psi(t_1, t_2) \times \partial_2 \psi(t_1, t_2)}{|\partial_1 \psi(t_1, t_2) \times \partial_2 \psi(t_1, t_2)|}.$$

Man säger att man orienterar ytstycket genom att göra ett kontinuerligt val av enhetsnormal.

Man får en yta genom att klistra ihop randbitar till olika ytstycken. Kan sluta med en yta med rand eller en yta utan rand. En sådan yta behöver inte gå att orientera.

Exempel Genom att klistra ihop sidorna på enhetskvadraten kan vi få fler olika sorters ytor: cylinder, torus, Möbiusband och Kleins flaska. Av dessa är de två första orienterbara, men inte de sista två.

Integration på ett ytstycke (8.4)

På samma sätt som att $ds = |c'(t)| dt$ kan motiveras vara ett längdelement på olika sätt, kan man motivera att

$$dS = |\partial_1 \psi(t_1, t_2) \times \partial_2 \psi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2$$

är ett ytelement. Vi kan t.ex. approximera ett litet fyrkantigt område på ytan med motsvarande parallelogram i tangentplanet som spänns upp av vektorerna $\partial_1 \psi dt_1$ och $\partial_2 \psi dt_2$. Längden av vektorprodukten ger då arean av det parallelogrammet.

Vi kan nu definiera en ytintegral på ett ytstycke

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

som beräknas som dubbelintegralen

$$\iint_D f(\psi(t_1, t_2)) |\partial_1 \psi(t_1, t_2) \times \partial_2 \psi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2.$$

Tar vi $f = 1$ ger ytintegralen arean av Σ .

Exempel Vi ska beräkna

$$\iint_{\Sigma} (x + z + 2) dS$$

där Σ är den del av paraboloiden $x^2 - y + z^2 = 0$ som uppfyller $y < 1$. Detta ytstycke kan vi parametrisera med

$$\psi(t) = (t_1, t_1^2 + t_2^2, t_2), \quad t_1^2 + t_2^2 < 1,$$

och en räkning visar då att

$$|\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi(t)| = \sqrt{1 + 4t_1^2 + 4t_2^2}.$$

Alltså blir integralen lika med

$$\iint_{|t| < 1} (t_1 + t_2 + 2) \sqrt{1 + 4t_1^2 + 4t_2^2} dt_1 dt_2.$$

För att beräkna dubbelintegralen inför vi polära koordinater:

$$\iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} (r \cos \theta + r \sin \theta + 2) \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Vi kan utvidga ytintegralen till att integrera även på orienterade ytor. Integralen över en styckvis C^1 -kurva är noll, så vi kan dela upp ytan i ytstycken och beräkna delarna för sig.

Exempel Vi ska beräkna ytintegralen

$$\int_{S^2} x^2 dS,$$

där S^2 är enhetssfären, på två olika sätt, där vi utnyttjar att integralen längs en kurva är noll.

Det första sättet innebär att vi skär bort ekvatorn $z = 0$. Det som är kvar är då $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$, där Σ_+ är den övre hemisfären, alltså

$$\Sigma_+ = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\},$$

och Σ_- den nedre, där vi istället har $z < 0$. Båda dessa är ystycken och vi får att

$$\int_{S^2} x^2 dS = \int_{\Sigma_+} x^2 dS + \int_{\Sigma_-} x^2 dS.$$

Vi börjar med att beräkna integralen över Σ_+ . Med $\psi(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$ och $\phi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ har vi då att

$$|\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi| = \sqrt{1 + (\partial_1 \phi)^2 + (\partial_2 \phi)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

så

$$\int_{\Sigma_+} x^2 dS = \iint_{x^2 + y^2 < 1} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \dots = \frac{2\pi}{3}.$$

För att beräkna integralen går vi över till polära koordinater.

Integralen över den nedre hemisfären är lika stor, så vi får att

$$\int_{S^2} x^2 dS = \frac{4\pi}{3}.$$

Det andra sättet att beräkna integralen bygger på att vi skär bort Greenwich-meridianen, så att parametriseringen

$$\psi(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

avbildar

$$E = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$$

på återstoden av enhetssfären. En räkning visar då att

$$|\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi| = \sin \theta$$

(kom ihåg att $0 < \theta < \pi$, så högerledet är > 0) och vi får att

$$\begin{aligned} \int_{S^2} x^2 dS &= \iint_E (\sin \theta \cos \phi)^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Flödesintegralen i rummet

Låt $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett flöde i rummet och låt Σ vara ett ytstycke. Flödet genom Σ i riktning av enhetsnormalen N på ytstycket ges då av ytingegralen

$$\int_{\Sigma} (u|N) dS.$$

Om vi väljer parametriseringen så att N har samma riktning som $\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi$, så kan flödesintegralen skrivas

$$\iint_D (u(\psi(t_1, t_2)) | \partial_1 \psi(t_1, t_2) \times \partial_2 \psi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2.$$

Exempel Om vätskeflödet beskrivs av

$$u(x, y, z) = (-2y - 1, y, 2x^2 - z)$$

och Σ är funktionsytan

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

så vill vi beräkna det totala flödet igenom Σ i riktning bort från origo.

Som parametrisering kan vi ta

$$\psi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$$

och får då att

$$\partial_x \psi \times \partial_y \psi = (2x, 2y, 1).$$

Skalärprodukten av detta med u blir då

$$-4xy - 2x + 3x^2 + 3y^2 - 1$$

så flödesintegralen blir

$$\iint_{x^2 + y^2 < 1} (-4xy - 2x + 3x^2 + 3y^2 - 1) dx dy = \dots = \frac{\pi}{2}.$$

(Använd polära koordinater – räkningarna finns i boken.)