

Innehåll: Mer vektoranalys i planet

Kapitel 6.5 (s209–213), 8.3, 9.4–9.5

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- vad som menas med reguljära, slutna, enkla, styckvis reguljära kurvor, liksom orienterade kurvor.
- vad som menas med integration med avseende på båglängden
- flödesintegraler i planet
- vad som menas med rotation och divergens av plana vektorfält

Integration med avseende på båglängden (8.3)

Anmärkning Exempelen är tvådimensionella, men diskussionen går lika bra i t.ex. rummet. Det är bara beteckningarna som måste anpassas.

Båglängd

Vi kan tänka på kurvan som en väg, och parametreringen som en beskrivning av var vi är på vägen vid en viss tidpunkt t . Till en given kurva (väg) finns många parametriseringar, som svarar mot att vi kan köra längs vägen på många olika sätt. Vi skriver en parametrisering $c(t) = (x(t), y(t))$. Hastigheten vid en viss tidpunkt ges av $c'(t) = (x'(t), y'(t))$, som är en vektor, vilket ska skiljas från *farten*

$$|c'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

som bara är en storhet och inte har någon riktning.

Hur långt s man hinner beror på farten och tiden man färdas. Uttryckt i differentialform har vi

$$ds = |c'(t)|dt.$$

Den längd man kommer under ett tidsavsnitt $[a, b]$ får vi genom att summera sådana bidrag:

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_a^b |c'(t)|dt.$$

Anmärkning Man kan använda båglängden som parameter för att beskriva en kurva (tänk efter att detta är väldigt naturligt). Då genomlöper man hela tiden kurvan med farten ett, dvs $|c'(s)| = 1$. Detta gör vi t.ex. när vi parametriserar enhetscirkeln i cosinus och sinus.

Integration längs en kurva

I många sammanhang behöver man även kunna integrera en funktion längs en kurva. Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler. Då kan vi definiera en integral

$$\int_{\gamma} f(x, y)ds$$

som (löst uttryckt) innebär att vi summerar värdena av f längs kurvan γ så samma sätt som $\int_a^b f(x)dx$ innebär att vi summerar värdena av f längs intervallet $[a, b]$. Att beräkna en sådan integral är i princip enkelt: inför bara en parametrisering av kurvan i uttrycket:

$$\int_a^b f(c(t))|c'(t)|dt, \quad \gamma = \{c(t); a \leq t \leq b\}.$$

Vi får alltså en integral av en variabel genom att använda en parametrisering!

Exempel Vi vill beräkna integralen

$$\int_{\gamma} (x + y)ds$$

längs kurvan $\gamma = \{(3t^2, 3t - t^3); 1 \leq t \leq 2\}$. Vi har

$$|c'(t)| = \sqrt{(6t)^2 + (3 - 3t^2)^2} = 3 + 3t^2$$

så integralen blir

$$\int_{\gamma} (x + y)ds = \int_1^2 (3t^2 + 3 - t^3)(3 + 3t^2)dt = 81.3$$

Kurvintegraler

En kurvintegral längs en orienterad kurva $\gamma = c([a, b])$ (där $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))$)

$$\int_{\gamma} u_1(x, y)dx + u_2(x, y)dy$$

kan skrivas som att vi integrerar längs en kurva. Vi inför då

$$T(c(t)) = \text{enhetstangenten i rörelsens riktning} = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$$

och ser då att

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u_1(x, y)dx + u_2(x, y)dy &= \int_a^b (u_1(c(t))c'_1(t) + u_2(c(t))c'_2(t))dt \\ &= \int_a^b (u(c(t))|T(c(t))||c'(t)|)dt = \int_{\gamma} (u(x, y)|T(x, y))ds. \end{aligned}$$

Vi integrerar alltså projektionen av $u(x, y)$ i tangentens riktning, vilket motiverar varför integralen blir ett arbete om $u(x, y)$ är ett kraftfält.

Flödesintegraler i planet (9.4)

Låt γ vara ett kurvstycke i planet och $u(x, y)$ ett flöde av något över detta kurvstycke. Låt $N(x, y)$ vara ett kontinuerligt val av enhetsnormal till kurvstycket, så att det pekar mot ena sidan av γ . Då gäller att $(u(x, y)|N(x, y))$ mäter hur mycket som flödar i riktningen av N och integralen

$$\int_{\gamma} (u(x, y)|N(x, y))ds$$

det totala flödet över γ .

För att beräkna denna flödesintegral kan vi använda följande observation: om vi vrider $N(x, y)$ 90 grader moturs får vi en enhetstangent $T(x, y)$ till γ . Rotationen 90 grader moturs svarar mot avbildningen $R: (x, y) \mapsto (-y, x)$, så vi har att

$$(u(x, y)|N(x, y)) = (Ru(x, y)|RN(x, y)) = (Ru(x, y)|T(x, y)).$$

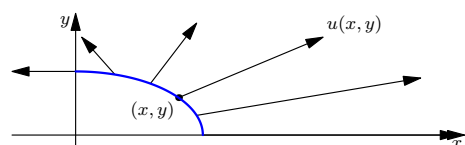
Eftersom $Ru(x, y) = (-u_2(x, y), u_1(x, y))$ följer att

$$\int_{\gamma} (u(x, y)|N(x, y))ds = \int_{\gamma} -u_2(x, y)dx + u_1(x, y)dy,$$

där γ i högerledet är den orienterade kurva som har T som enhetstangent.

Exempel Låt γ vara den del av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ som ligger i första kvadranten och N den enhetsnormal på γ som pekar bort från origo. Definiera $u(x, y)$ genom

$$u(x, y) = (x^2 - y^2, xy).$$



Om vi roterar N 90 grader moturs får vi den enhetstangent till γ som svarar mot att vi genomlöper kurvan moturs. Det betyder att

$$\int_{\gamma} (u|N) ds = \int_{\gamma} -xy dx + (x^2 - y^2) dy$$

med sagda genomloppsriktning av γ . Med parametriseringen

$$c(t) = (2 \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

får vi då att kurvintegralen är

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} ((4 \cos^2 t - \sin^2 t) \cos t + (2 \cos t \sin t) 2 \sin t) dt \\ = \int_0^{\pi/2} (4 - \sin^2 t) \cos t dt = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

Rotation och divergens i planet (9.5)

Vi påminner oss så Green's sats. Om Ω är ett öppet, begränsat, område i planet med en (styckvis) C^1 rand $\partial\Omega$ och $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ är ett vektorfält som har kontinuerliga derivator i en omgivning av $\overline{\Omega}$, så gäller att

$$\int_{\partial\Omega} u_1(x, y) dx + u_2(x, y) dy = \iint_{\Omega} (\partial_1 u_2(x, y) - \partial_2 u_1(x, y)) dx dy,$$

där omloppsriktningen av Ω sker i positiv riktning.

Integranden har här fått ett namn: den kallas rotationen av vektorfältet $u(x, y)$ och skrivs

$$\text{rot } u(x, y) = \partial_1 u_2(x, y) - \partial_2 u_1(x, y).$$

Denna är ett tal (och inte en vektor som boken verkar få det att verka som) och mäter hur mycket vektorfältet "snurrar" i en punkt. Ett positivt värde betyder att rotationen är moturs, ett negativt att den är medurs. Läs om skovelhjulet i boken!

Definition Vektorfältet $u(x, y)$ sägs vara virvelfritt om $\text{rot } u(x, y) = 0$ överallt.

Vi har tidigare sett att för att ett vektorfält ska vara ett potentialfält måste det vara virvelfritt (men att omvändningen inte alltid är sann).

Vi ser nu att vi kan skriva Green's formel som

$$\int_{\partial\Omega} (u(x, y)|T(x, y)) ds = \iint_{\Omega} \text{rot } u(x, y) dx dy,$$

där T är den enhetstangent till $\partial\Omega$ som innebär att vi genomlöper randen i positiv omloppsriktning.

Betrakta nu istället flödesintegralen

$$\int_{\partial\Omega} (u(x, y)|N(x, y)) ds,$$

där $N(x, y)$ är den *utåtriktade* enhetstangenten. Denna skrev vi ovan om som en kurvintegral, och om vi använder Greens formel på den får vi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (u(x, y)|N(x, y)) ds &= \iint_{\Omega} (\partial_1 u_1(x, y) - \partial_2(-u_2(x, y))) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} (\partial_1 u_1(x, y) + \partial_2 u_2(x, y)) dx. \end{aligned}$$

Vi inför därför divergensen av vektorfältet $u(x, y)$ genom

$$\text{div } u(x, y) = \partial_1 u_1(x, y) + \partial_2 u_2(x, y)$$

och då får Greens formel utseendet

$$\int_{\partial\Omega} (u(x, y)|N(x, y)) ds = \iint_{\Omega} \text{div } u(x, y) dx dy.$$

Denna formel kallas Gauss' sats, men är alltså ekvivalent med Greens formel i planet. Vi ska se att i rummet är det inte så!

För att bättre förstå vad rotationen och divergensen är för något låtet vi Ω vara ett litet klot $B_\epsilon(a, b)$ med radie $\epsilon > 0$ och medelpunkt i (a, b) . Låter vi $\epsilon \rightarrow 0$, ser vi då att

$$\text{rot } u(a, b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\partial B_\epsilon(a, b)} (u(x, y)|T(x, y)) ds$$

och att

$$\text{div } u(a, b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\partial B_\epsilon(a, b)} (u(x, y)|N(x, y)) ds.$$

Den andra kan vi direkt tolka som nettoflödet ut ur punkten (a, b) , vilket betyder att om $\text{div } u(a, b) > 0$ så har vi en källa i (a, b) , medan om $\text{div } u(a, b) < 0$ så har vi en sänka i (a, b) . Man kallar därför $\text{div } u(x, y)$ för källtätheten av vektorfältet och Gauss sats säger att mängd som strömmar ut över randen är nettomängden källor i området (sänkor är negativa källor). In det gäller att $\text{div } u(x, y) = 0$ i ett område sägs vektorfältet vara källfritt där.