

Innehåll: Tillämpningar av integraler

Kapitel 8.1-8.2

- 1) Volymsberäkning
- 2) Tyngdpunkt
- 3) Tröghetsmoment

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- kunna ställa upp integraler som beräknar volymer, massor, tyngdpunkter och tröghetsmoment

Volymsberäkning (8.1)

Exempel Vi ska beräkna volymen av den kropp K som begränsas av ytorna $z = 4x^2 + y^2$ och $z = 2y + 3$ (en paraboloid och ett plan, men det har ingen betydelse i vårt resonemang utom att det gör vissa räkningar enklare).

Den integral vi ska beräkna är $\iiint_K dx dy dz$, och för att göra det behöver vi få någon uppfattning av hur området ser ut. Vi väljer att integrera i z -led först, och för det behöver vi veta projektionen av K på xy -planet. Den får vi genom

$$4x^2 + y^2 = 2y + 3 \Leftrightarrow 4x^2 + (y - 1)^2 = 4,$$

vilket är en ellips. Innehållet kallar vi D . Vi kan nu räkna

$$\iiint_K dx dy dz = \iint_D \left(\int_{4x^2+y^2}^{2y+3} dz \right) dx dy = \iint_D (4 - 4x^2 - (y - 1)^2) dx dy.$$

Notera integranden!!

För att beräkna integralen inför vi polära koordinater enligt:

$$2x = r \cos \theta, \quad y - 1 = r \sin \theta$$

(varför?), vars funktionaldeterminant är $r/2$ (varför?) och integralen ovan blir

$$2\pi \int_0^2 (4 - r^2) \frac{r}{2} dr = \frac{\pi}{4} [-(4 - r^2)^2]_0^2 = 4\pi.$$

Egenarbete

Tänk först över hur vi gjorde motsvarande sätt i endim. Lös sedan 8.5. Notera att en stor del av problemet med sådana här uppgifter är att kunna rita upp en bra figur som gör det lätt att ställa upp rätt integral.

Tyngdpunkt (8.2 s268-272))

Liksom i endimen är övergången till att beräkna den totala massan utifrån kroppens densitet helt baserat på observationen $dm = \rho dV$, så integralen blir $\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz$. Tyngdpunkten bestäms på samma sätt som i endimen.

Exempel Tyngdpunkten för ett homogent klot ligger uppenbarligen i origo, liksom att tyngdpunkten för ett halvklot ligger på axeln som är vinkelrätt mot där det är delat. Vi ska beräkna dess exakta läge.

Låt klotet ha ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$. Vi kan sätta tätheten till ett och då blir vikten lika med $4\pi R^3/6$. Återstår att beräkna integralen

$$\begin{aligned} \iiint_K z dx dy dz &= \iiint_E r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= 2\pi \left(\int_0^R r^3 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) = \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

Division ger nu att $z_T = 3R/8$, så tyngdpunkten ligger i $(0, 0, 3R/8)$.

Egenarbete

Repetera hur vi gjorde i endimen! Räkna sedan 8.14, 8.15 och studera lösningen på den senare. Jämför med hur vi gjorde i endim!

Tröghetsmoment (8.2 s272-273)

Vi börjar med lite fysik:

- Kinetisk energi för massa m med fart v : $E = mv^2/2$.
- Rotation med radie r och vinkelhastighet ω ger farten $v = r\omega$ och energin

$$E = \frac{m(r\omega)^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 m.$$

- Stel kropp K roterar: massdelen dm har energi $dE = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$, så hela kroppen får kinetisk energi

$$\int_K dE = \frac{\omega^2}{2} \int_K r^2 dm.$$

Integralen $J = \int_K r^2 dm$ utgör tröghetsmomentet.

Exempel Beräkna tröghetsmomentet med avseende på z -axeln för det homogena klotet med medelpunkt i origo och radie R och med densitet ett.

Enligt diskussionen ovan ska vi beräkna integralen

$$J = \iiint_K (x^2 + y^2) \cdot 1 dx dy dz.$$

Rymdpolära koordinater ger oss (kontrollera!)

$$J = \iiint_L r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

Egenarbete

Förstår du härledningen, så att du kan förklara den för någon annan? Testa med en kamrat. Lös sedan 8.22 och studera lösningen i boken.