

Innehåll: Lite blandade utvidgningar

Kapitel 9.2, 7.4, 7.6, 8.1

- 1) Om kurvintegraler som inte beror av vägen
- 2) Generaliserade integraler
- 3) Trippelintegraler och volymsberäkningar

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- vad som krävs för att en kurvintegral inte ska bero av vägen
- beräkna generaliserade dubbelintegraler
- förstå hur man går från dubbelintegraler till trippelintegraler och vad de senare kan användas till

Om kurvintegraler som inte beror av vägen

Vi börjar med att repetera vad vi vet. I den låter vi $\omega = Pdx + Qdy$ vara en allmän differentialform och inför också **beteckningen**

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Då får Greens formel den symmetriska formen

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

- en exakt differentialform ω är en för vilken det finns en (primitiv) funktion F sådan att $\omega = dF$
- Om ω är exakt gäller att $\int_{\gamma} \omega = F(p_1) - F(p_0)$ om γ är en kurva som går från p_0 till p_1 .
- Om ω är exakt och γ_1 och γ_2 är två olika vägar mellan samma punkter så gäller att

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

- Om integralen är oberoende av vägen är den exakt.
- För en allmän differentialform gäller enligt Greens formel att

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega + \iint_D d\omega.$$

där D är det område som har den positivt orienterade randen $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$.

- ω sägs vara sluten om $d\omega = 0$.
- varje exakt differentialform är sluten

Följer ur detta att om ω är sluten, så är den också exakt?

Exempel Differentialformen

$$\omega = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

är sluten utanför origo eftersom

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Från tidigare vet vi också att den är exakt.

Exempel Betrakta differentialformen

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Vi ser då att den är sluten utanför origo eftersom

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Men om vi integrerar runt t.ex. enhetscirkeln får vi

$$\int_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_{\gamma} (-ydx + xdy) = 2 \text{ arean av enhetscirkeln} = 2\pi.$$

Om vi därför integrerar från t.ex. $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ längs övre halvcirkeln och längs undre halvcirkeln så får vi olika resultat (skillanden är π). Så trots att differentialformen är sluten (utanför origo) är den inte exakt där!

Föregående exempel visar på att en sluten differentialform måste inte vara exakt. I det här fallet beror det på att området den är definierad i har ett "hål" (origo) och när vi snurrar runt origo får vi ett annat värde än om vi inte gör det. Om vi kopplar ihop allt vi lärt oss ser vi att

$$\int_{\partial D} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \notin D \\ 2\pi & \text{om } 0 \in D \end{cases}.$$

Differentialformen beskriver (väsentligen) magnetfältet runt en oändligt lång strömförande ledare (vinkelrät mot planet genom origo) och är det yttersta skälet till varför en elmotor fungerar!

Mycket av diskussionen ovan blir lite klarare om vi istället tittar i polära koordinater. Vi har att

$$x = r \cos \theta \Rightarrow dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta$$

och

$$y = r \sin \theta \Rightarrow dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta.$$

Det betyder att $-ydx + xdy =$

$$r^2((\sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta)dr + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)d\theta) = r^2 d\theta.$$

En konsekvens av detta ges i nästa exempel:

Exempel Vilken area innesluts av cardoiden $r(\theta) = 1 + \cos \theta$? Enligt ovan kan denna beräknas som

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \theta + \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}) d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Magnetfältet blir nu enkelt:

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = d\theta,$$

och då ser vi varför det fungerar som det gör: om vi inte går runt origo tar vinklarna ut varandra, om vi går runt origo ett varv ändras vinkeln 2π .

Exempel Vi vill hitta en primitiv funktion till

$$\omega = \frac{-y(x-y)dx + x(x-y)dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Att titta i polära koordinater verkar då vara en god idé:

$$\omega = (\cos \theta - \sin \theta) d\theta,$$

för vilken vi har den primitiva funktionen (i polära koordinater!)

$$F(r, \theta) = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}).$$

Vad händer om vi integrerar ω längs en halvstråle från origo? Vad är integralen av en kurva som startar i $(1, 0)$ och slutar på linjen $y = x$?

Egenstudier

Det var som sagt repetition, så här finns inga instuderingsuppgifter.

Generaliserade integraler (7.4)

Hittills när vi integrerat har både området D och integranden $f(x, y)$ varit begränsade. Vi ska nu släppa på det kravet och definiera generaliserade integraler genom att göra gränsovergångar.

Antag att D är obegränsat och f (möjligen) obegränsad nära några punkter på randen. Antag att $f(x, y) \geq 0$ i D . Tag då en svit $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots$ av delmängder sådana att

1. alla D_k är begränsade
2. f är begränsad i alla D_k
3. sviten växer mot D , d.v.s. $D_k \rightarrow D$ då $k \rightarrow \infty$

Vi säger då att integralen $\iint_D f(x, y) dx dy$ är konvergent om gränsvärdet

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_k} f(x, y) dx dy$$

existerar (ändligt) och integralen är då lika med I .

Anmärkning Om vi inte kräver att $f \geq 0$ i D kan värdet bero på vilken svit av delmängder vi väljer! Man inför därför begreppet absolutkonvergent för funktioner som inte är icke-negativa.

Exempel För att beräkna integralen

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad D = \{(x, y); x^2 + y^2 \geq 1\}$$

inför vi polära koordinater och får ($E = \{(r, \theta); r \geq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$)

$$I = \iint_E \frac{r dr d\theta}{r^4} = 2\pi \int_1^\infty \frac{dr}{r^3} = \pi.$$

Exempel För att beräkna integralen

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{y-x}}, \quad D = \{(x, y); y \geq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

(vars integrand är obegränsad på linjen $y = x$) gör vi upprepad integration:

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y-x}} \right) dx = \int_0^1 [2\sqrt{y-x}]_x^1 dx = \frac{4}{3}$$

Exempel För att beräkna integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

trots att vi inte kan hitta en primitiv funktion (i elementära funktioner) till integranden. Tricket är följande:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

I polära koordinater blir dubbelintegralen

$$2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \pi.$$

Det följer att $I = \sqrt{\pi}$.

Jämförelsesatser gäller som i endimen: läs själva i boken!

Egenarbete

Studera först 7.30 och lös sedan 7.31.

Trippelintegraler (7.6)

innebär egentligen inget nytt. Utom att upprepad integration kan göras på två sätt:

1. en enkelintegral först och sedan en dubbelintegral
2. en dubbelintegral först, därefter en enkelintegral.

Illustreras bäst med exempel.

Exempel För att beräkna trippelintegralen

$$I = \iiint_K xy^2 z^3 dx dy dz$$

där K är enhetskuben kan vi (t.ex.) först integrera i z -led:

$$I = \iint_{0 \leq x, y \leq 1} xy^2 \left(\int_0^1 z^3 dz \right) dx dy = \iint_{0 \leq x, y \leq 1} xy^2 \frac{1}{4} dx dy.$$

Sedan räknar vi ut dubbelintegralen som tidigare och får att $I = 1/24$.

Exempel Vi vill beräkna integralen

$$I = \iiint_K z dx dy dz, \quad K = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Vi kan resonera på två olika sätt:

1. Om vi vill integrera längs z -led först, ska vi göra det för varje punkt (x, y) som det finns något i z -led att integrera över, alltså de som uppfyller $x^2 + y^2 \leq 4$. Mängden av sådana kallar vi D och får då

$$I = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (4 - (x^2 + y^2)) dx dy.$$

Denna är sedan upplagd för polära koordinater och vi får att

$$I = 2\pi \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 4\pi.$$

2. Alternativet är att vi för varje $0 \leq z \leq 2$ integrerar över den skiva som är skärningen mellan kroppen och motsvarande horisontella plan. Skärningen (s projektion på xy -planet) blir

$$D_z : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 - z^2.$$

Vi ser att arean av D_z är $\pi(\sqrt{4-z^2})^2 = \pi(4-z^2)$ vilket vi utnyttjar i räkningen (i detta fall!!!)

$$I = \int_0^2 z \left(\iint_{D_z} dx dy \right) dz = \int_0^2 \pi z (4 - z^2) dz = 4\pi.$$

Det är viktigt att notera att ibland fungerar bara ena alternativet rent praktiskt (dvs vi klarar att utföra integrationerna)!

Exempel Föregående exempel kan också beräknas på ett tredje sätt: variabelbyte. Detta fungerar som för dubbelintegraler att man måste beräkna en funktionaldeterminant. I det här exemplet vill vi använda rymdpolära koordinater, och för dem är funktionalmatrisen

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

(absolutbelopp behövs inte eftersom $\sin \theta \geq 0$ för aktuella θ). Området i föregående exempel blir i polära koordinater

$$E = \{(r, \theta, \phi); 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

och integralen därför

$$I = \iiint_E r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \left[-\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

Volymberäkningar innebär egentligen inget annat än att vi integrerar funktionen ett:

$$\text{Volymen av } K = \iiint_K dx dy dz.$$

Praktiskt kan det dock innebära några svårigheter som handlar om att visualisera området så att man kan identifiera hur man ska genomföra integrationen. Läs själva kapitel 8.1 så ser vi på exempel nästa gång.

Egenarbete

Lös **7.43** och studera dess lösning. Lös sedan **7.42** och **7.44**. Fundera på om du kan lösa dem både genom att först räkna ut en enkelintegral och först räkna ut en dubbelintegral.