Föreläsning 11

Innehåll: Kurvintegraler och dubbelintegraler

Kapitel 9.1 och 7.1

1) Två sorters integraler
2) Kurvintegraler
3) Dubbelintegraler över en rektangel

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- beräkna en kurvintegral från en parametrisering av en kurva
- beräkna en dubbelintegral över en rektangel genom upprepad integration

Två olika sorters integraler

Den endimensionella (bestämda) integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

generaliseras till tvådimen på två olika sätt:

1. I det ena fallet ser vi på integranden som en differentialform ($\omega(x) = f(x)dx$), vilken integreras längs en kurva (den räta linjen $a \le x \le b$). Detta generaliseras till integration längs kurvor av differentialformer $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ i tvådimen. Detta ger oss s.k. kurvintegraler

$$\int_\gamma (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

   att definiera och beräkna.
2. I det andra fallet generaliserar vi tolkningen av integralen som area under grafen $y = f(x)$ till att vi nu ska beräkna volymen under grafen till $z = f(x,y)$. Detta ger oss s.k. dubbelintegraler

$$\int\int_D f(x,y)dxdy,$$

   där D är definitionsområdet för f, att definiera och beräkna.

Det är viktigt att notera att dessa har helt olika tolkningar och användningsområden.

Kurvintegraler (9.1)

Tänk en kurva approximerad med ett polygon Γ av små räta linjestycken. På varje litet linjestycke ska kurvintegralen betyda precis värdet av differentialformen, så integralen av polygonet ska definieras som

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \sum_i P(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i) + Q(x_i,y_i)(y_{i+1}-y_i).$$

Om vi antar att kurvan γ har tangent i varje punkt kan vi alltid approximera kurvan i lämplig mening med sådana polygon som ligger godtyckligt nära ursprungskurvan. (Jämför Riemannsummor.)

För praktiska tillämpningar inför vi en parametrisering av kurvan: $\gamma = \{r(t) = (x(t), y(t)),\ a \le t \le b\}$. Med polygonhörnen $(x_i, y_i) = r(t_i)$ blir summan ovan

$$\sum_i (P(r(t_i))x'(t_i) + Q(r(t_i))y'(t_i))(t_{i+1}-t_i).$$

Inför nu vektorfältet $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ Då kan högerledet skrivas

$$\sum_i [F(r(t_i)) \cdot r'(t_i)](t_{i+1}-t_i),$$

vilket är Riemannsumma till integralen

$$\int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot dr(t).$$

Man kan (som boken gör) använda detta som definition av vad kurvintegralen ska vara:

$$\int_\gamma \omega(x,y) = \int_a^b F(r(t)) \cdot dr(t),$$

och då måste man visa att olika parametriseringar av samma orienterade kurva ger samma integral (vilket dock är lätt – det visar sig följa ur kedjregelen). Alternativet är att göra en ordentlig integrationsteori av det inledande resonemanget.

Anmärkning Nästa gång ska vi diskutera det fysikaliska innehållet i dessa integraler.

Exempel Vi ska beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\gamma (xydx + (x^2+y^2)dy)$$

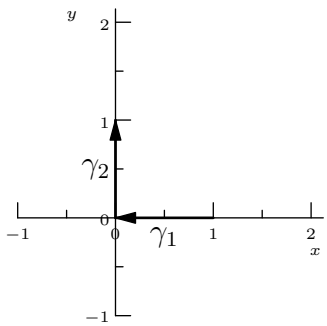
då γ är den del av enhetscirkeln som ligger i första kvadranten, genomlöpt moturs.

Vi vet att $\gamma = \{(\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$, vilket betyder att

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin t(-\sin t)dt + (\cos^2 t + \sin^2 t)\cos t dt) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t \sin^2 t + \cos t)dt = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Exempel Samma differentialform, men nu består γ av två kurstycken, nämligen den räta linjen γ_1 från $(1,0)$ till $(0,0)$ och den räta linjen γ_2 från $(0,0)$ till $(0,1)$.



Integralen är summan av integralerna på de två kurvstyckena och vi kan notera att $dy = 0$ i den först integralen och $dx = 0$ i den andra:

$$I = \int_{\gamma_1} xydx + \int_{\gamma_2} (x^2+y^2)dy.$$

Kurvstyckena kan i sin tur parametriseras (t.ex.) $\gamma_1 = \{(1-t, 0),\ 0 \le t \le 1\}$ och $\gamma_2 = \{(0,t),\ 0 \le t \le 1\}$ och vi får

$$I = \int_0^1 (1-t) \cdot 0(-1)dt + \int_0^t (0^2+t^2)dt = \frac{1}{3}.$$

Anmärkning Eftersom $y = 0$ på γ_1 och $x = 0$ på γ_2 kunde vi ha förenklat redan från början:

$$I = \int_{\gamma_1} xydx + \int_{\gamma_2} (x^2+y^2)dy = \int_{\gamma_2} y^2 dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Om γ är en orienterad kurva, så betyder $-\gamma$ samma kurva orienterad i omvänd riktning. Det är då klart att

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_{\gamma} \omega.$$

Egenarbete

Börja med att räkna några exempel: **9.1–9.3**. Notera att ett problem är att kunna parametrisera kurvorna vi integrerar på, men det är inget problem här.

Dubbelintegral över en rektangel (7.1)

Analogin mellan enkelintegralen $\int_a^b f(x)dx$ och dubbelintegralen $\int\int_D f(x,y)dxdy$ är sådan att integrationsteorin går till på precis samma sätt. Vi börjar med att anta att $D = R = \{(x,y); a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ är en axelparallell rektangel.

1. Definiera först trappfunktioner som funktioner som är konstanta på axelparallella rektanglar och integralen av dem som höjden gånger basarean.
2. Approximera funktionen f uppifrån och nedifrån med trappfunktioner: $\Phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \Psi(x,y)$
3. Precis som i endimen säger vi att f är (Riemann-)integrerbar om det för varje $\epsilon > 0$ går att finna sådana trappfunktioner att skillnaden mellan deras integraler är $< \epsilon$.
4. När f är integrerbar finns precis ett tal som ligger mellan alla över- och underintegraler, och detta betecknas

$$\int\int_D f(x,y)dxdy.$$

Vi ska egentligen tänka på integralen som en viktad summa av en massa rektangelareor $dxdy$, där vikterna ges av f. Vi återkommer till det när vi ska tillämpa integraler.

Skivformeln från endimen sa att vi kunde beräkna en volym genom att skiva upp den längs en axel:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b A(x)dx,$$

och nu kan vi skriva

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy,$$

vilket ger oss metoden att beräkna en dubbelintegral genom upprepad integration:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

(andra ordningen går lika bra!)

Exempel Vi ska beräkna integralen

$$I = \int\int_R x^3y^2\,dxdy, \quad R = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}.$$

Vi använder skivformeln och integrerar först i y-led:

$$I = \int_0^1 (\int_0^2 x^3y^2)dx = \int_0^1 \left[x^3\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx = \int_0^1 \frac{8x^3}{3}dx = \frac{2}{3}.$$

Det går lika bra att först integrera i x-led! Följande observation är också värd att göra: när vi integrerar längs en variabel är den andra en konstant, och kan hanteras som en sådan. Det betyder att vi kunde gjort såhär:

$$I = \int_0^1 x^3(\int_0^2 y^2)dx = (\int_0^1 x^3dx)(\int_0^2 y^2dy).$$

I detta fall!!!!!

I detta exempel spelar det ingen roll vilken variabel vi börjar integrera m.a.p. Så är det inte alltid.

Exempel Vi ska beräkna

$$I = \int\int_R y\cos(xy)dxdy, \quad R = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Integrerar vi m.a.p. x först blir det ganska enkelt:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 y\cos(xy)dx)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(xy)]_0^1 dy = 1.$$

Andra ordningen är "för svår"!

Det gäller att inte ge upp för att den ansats man startat med blir krånglig! Vi avslutar med att konstatera följande

Sats *En funktion som är kontinuerlig på en kompakt rektange är integrerbar på denna.*

Egenarbete

Integration över rektanglar är egentligen inget nytt jämfört med vad vi gjorde i endim (du kommer väl ihåg skivformeln). Men lite påminnelse är bra, så gör **7.1, 7.3**. I båda fallen, räkna integralerna två gånger, där du börjar med olika variabler. Ofta är det så att det är bara i ena riktningen det går att genomföra räkningarna, och då är det bra att vara van vid båda sätten. Glöm inte att alltid rita upp integrationsområdet!