

Innehåll: Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner

Kapitel 6.1-6.4

- 1) Funktionalmatrisen
- 2) Funktionaldeterminanten och dess betydelse
- 3) Implicita funktionssatsen

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- beräkna en funktionalmatris och i förekommande fall funktionaldeterminanten
- formulera inversa funktionssatsen och (i enklaste fallet) implicita funktionssatsen
- utföra implicit derivering på en nivåkurva

Funktionalmatrisen

Vi har redan gjort detta: om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ så är f differentierbar i a om vi kan skriva

$$f(a+h) - f(a) = A(a,h)h$$

där $A(a,h)$ är kontinuerlig i $h=0$. Differentialen är (den linjära) avbildningen $df(a)[h] = A(a,0)h$ och matrisen $A(a,0)$ (vilken typ har den?) betecknas $f'(a)$ och kallas funktionens *funktionalmatris*.

Vektorvärda funktioner av en variabel (6.1)

Låt I vara ett intervall i $\mathbb{R}$. En funktion $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ kan tolkas som en parametrisering av en kurva i $\mathbb{R}^m$.

Exempel Funktionen $r(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$ parametriserar den högra skänkeln av hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$. För att beräkna differentialen skriver vi

$$r(t+h) - r(t) = \left(\frac{\cosh(t+h) - \cosh(t)}{h}, \frac{\sinh(t+h) - \sinh(t)}{h} \right) h$$

varifrån vi ser att

$$r'(t) = (\sinh t, \cosh t).$$

Detta fall har diskuterats i endim-kursen.

Egenarbete

Räkna 6.3 som mycket är en repetition av endim.

Ytor på parameterform (6.2)

En funktion $r: \mathbb{R}^2 \ni D \rightarrow \mathbb{R}^3$ kan uppfattas som en parametrisering av en yta. I detta fall blir funktionalmatrisen en 2×3 -matris som nästa exempel illustrerar.

Exempel Att parametrisera enhetscirkeln med (rymd-)polära koordinater svara mot funktionen

$$r(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

För fixt ϕ får vi longituderna och tangenten till en sådan (svarande mot latituden θ) får tangenten

$$r'_\theta(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta),$$

medan vi för fixt θ får latituderna, med tangenter

$$r'_\phi(\theta, \phi) = (-\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, 0).$$

I en given punkt spänner dessa vektorer upp tangentplanet till enhetsfären. Det betyder också att

$$r'_\theta(\theta, \phi) \times r'_\phi(\theta, \phi)$$

blir en normalvektor till tangentplanet.

Detta generaliseras till allmänna ytor med den reservationen att om de två tangentvektorerna i en punkt blir parallella kan de inte spänna upp ett tangentplan. I så fall har ytan inget tangentplan i den punkten.

Egenarbete

Lös 6.6.

Allmänt (6.3 s189-197)

Funktionalmatrisen blir nu av typen $m \times n$, där varje komponent av funktionen är en egen rad, nämligen gradienten av denna.

Exempel Funktionen $f(x, y) = (x^2y + x, y^2)$ får funktionalmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2xy + 1 & x^2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Funktionen $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ får funktionalmatrisen

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Funktionen $f(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ får funktionalmatrisen

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Definitionen på funktionalmatris var att $df(a)[h] = f'(a)h$ (matrismultiplikation), vilket betyder att kedjeregeln för funktionalmatriserna får formen

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

dvs samma som i endim, med den skillnaden att det nu handlar om matrismultiplikationer!

Egenarbete

Bekanta dig med funktionalmatrisen genom att räkna 6.9, 6.11.

Funktionaldeterminant (6.3 s197-200)

För en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ blir funktionalmatrisen $f'(a)$ en kvadratisk matris, och har då en determinant $\det f'(a)$. Determinanter är kopplade till areor och volymer och liknande saker i högre dimensioner (Repetera hur!).

Exempel Betrakta funktionen $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ från ovan. Dess funktionaldeterminant blir (räkna ut!)

$$\det f'(a) = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, \theta)} = r.$$

Detta betyder att den linjära avbildningen $f'(a)$ avbildar ett område i (r, θ) planet med arean ett på ett område i (x, y) -planet med arean r . Det i sin tur betyder att för väldigt små områden med arean A avbildar f detta på ett område som har arean rA . I form av små rektanglar: $dx dy = r dr d\theta$. **Tänk igenom!**

Exempel För funktionen $f(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ ger en räkning att funktionaldeterminanten blir $r^2 \sin \theta$. Med tolkningen ovan betyder det att ett jättelitet område i (r, θ, ϕ) -rummet med volym $dr d\theta d\phi$ avbildas på ett område som har jätteliten volym

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Anmärkning När vi sedan (längre fram) definierar integraler genom att vi summerar lämpligt viktade volymselement $dx dy dz$ så ger denna observation oss ett sätt att göra variabelbyten i (flerdimensionella) integraler. Tänk över vilken den endimensionella motsvarigheten är!

Egenarbete

Bekanta dig med funktionaldeterminanten genom att räkna 6.17.

Implicita funktionssatsen (6.4)

Om vi räknar med differentierbarhet istället för derivator skiljer sig endim från flerdim sig knappast åt utom det att vi måste involvera matrismultiplikation i flerdim. Bevisen för lagar om differentialen blir desamma. På ett undantag när: vi har inte diskuterat en motsvarighet till derivation av en invers funktion. Om f är en (reellvärd) funktion och $g = f^{-1}$ dess invers, så minns vi att (om $f'(a) \neq 0$)

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad b = f(a).$$

Motsvarande gäller i flerdim om vi tolkar division med $f'(a)$ som att vi ska ta inversen av funktionalmatrisen $f'(a)$. Notera att för att det ska finnas en invers funktion i flerdim måste $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (värde- och definitionsmängd måste ligga i samma $\mathbb{R}^n$). Funktionalmatrisen blir därför kvadratisk, och för att inversen ska finnas måste dess determinant vara noll. Inversa funktionssatsen säger nu att detta också är tillräckligt:

Sats (Inversa funktionssatsen) Om funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ har kontinuerliga derivator i en omgivning av a och $\det f'(a) \neq 0$, så har funktionen f i någon omgivning av a en kontinuerligt deriverbar invers f^{-1} . Funktionalmatrisen i punkten $b = f(a)$ blir $f'(a)^{-1}$.

Anmärkning Om vi skriver $y = f(x)$ så har vi $dy = f'(x)dx$ och alltså $dx = f'(f^{-1}(y))^{-1}dy$, så formeln är självklar. Att inversen finns och blir differentierbar är det som behöver bevisas!

En viktig konsekvens av denna sats är

Sats (Implicita funktionssatsen) Låt $F(x, y)$ vara en reellvärd funktion av två variabler med kontinuerliga derivator. Låt (a, b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$ och antag att $F'_y(a, b) \neq 0$. Då finns en kontinuerligt deriverbar funktion f sådan att nivåkurvan kan skrivas $y = f(x)$ i en omgivning av (a, b) .

(För beviset använder man inversa funktionssatsen på funktionen $(x, y) \rightarrow (x, F(x, y))$ – tänk igenom!)

Exempel Låt $F(x, y) = x^2 + y^2$ och sätt $C = 1$. Då gäller att $F'_y(x, y) = 2y$ och detta är $\neq 0$ då $y \neq 0$. I varje punkt (a, b) sådan att $b \neq 0$ kan vi därför lösa ut y som funktion av x : om $b > 0$ tar vi $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ och om $b < 0$ tar vi $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Notera att i punkterna $(\pm 1, 0)$ har kurvan en lodrät tangent!

Exempel För att visa att ekvationen $y^5 + xy - 4 = 0$ definierar y som funktion av x nära punkten $P = (3, 1)$, ska vi alltså derivera vänsterledet m.a.p. $y : 5y^4 + x = 8 \neq 0$ då $x = 3, y = 1$. Det följer att nära P kan kurvan skrivas $y = f(x)$ för någon funktion f . Hur funktionen f ser ut får vi inte reda på, men vi kan bestämma dess derivata genom s.k. implicit derivering: eftersom $f(x)^5 + xf(x) - 4 = 0$ gäller att $5f(x)^4 f'(x) + xf'(x) + f(x) = 0$, från vilket vi kan lösa ut $f'(x) = -f(x)/(5f(x)^4 + x)$. I punkten P blir detta $f'(3) = -1/8$. Vi kan alltså beräkna derivatan i punkten P , men ingen annan punkt!

Anmärkning Implicita funktionssatsen kan generaliseras en hel del – se boken.

Egenarbete

Sätt dig in i implicita funktionssatsen genom att räkna 6.22.