Föreläsning 9

Innehåll: Differentialekvationer

Kapitel 4.7

1) Differentialformer och Primitiva funktioner
2) Första ordningens partiella differentialekvationer
3) Vågekvationen
4) Värmeledningsekvationen eller Diffusionsekvationen

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- lösa ekvationen $dF = \omega$ där ω är en differentialform
- känna till några av våra vanligaste partiella differentialekvationer
- förstå hur man kan använda variabelbyten för att komma åt (vissa) ekvationers lösning

Differentialformer och primitiva funktioner

I endim innebar att hitta en primitiv funktion F till en given funktion f att vi skulle lösa ekvationen

$$dF(x) = f(x)dx$$

(f känd, F sökes). För en funktion av två variabler vet vi att $dF(x,y)$ blir ett uttryck på formen

$$\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

(där a, b är partiella derivator). Ett sådant uttryck kallas en *differentialform*. Sådana kommer att bli viktiga längre fram.

Anmärkning En differentialform är en linjär funktion av en vektor (h,k), i det att vi i varje punkt (x,y) har en linjär funktion:

$$\omega(x,y)[h,k] = P(x,y)dx[h,k] + Q(x,y)dy[h,k] = P(x,y)h + Q(x,y)k.$$

Detta behöver vi dock inte bekymra oss om. Däremot leder det till att vi kan integrera differentialformer längs kurvor, vilket gör dem mycket användbara inom fysiken.

Frågan vi ställer oss här är följande: givet en differentialform $\omega(x,y)$, finns det en (reellvärd) funktion $F(x,y)$ sådan att

$$dF(x,y) = \omega(x,y)?$$

Om den finns kallar vi F för en primitiv funktion till differentialformen. Ett annat namn är potentialfunktion av fysikaliska skäl vi återkommer till.

Exempel Bestäm en primitiv funktion till differentialformen

$$\omega(x,y) = (3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy + 3y^2)dy.$$

Problemet är ekvivalent med att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + y^2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^3 + 2xy + 3y^2 \end{cases}.$$

Löser vi här den första ekvationen (endim med observationen att konstanten kan vara en godtycklig funktion av de övriga variablerna) ser vi att

$$F(x,y) = x^3y + xy^2 + g(y).$$

Deriverar vi denna ekvation m.a.p. y får vi $\partial F/\partial y = x^3 + 2xy + g'(y)$, och jämför vi med vad den är ovan ser vi att $g'(y) = 3y^2$. Det följer att $g(y) = y^3 + C$ och alltså att

$$F(x,y) = x^3y + xy^2 + y^3 + C.$$

Det är inte alltid det går att lösa ekvationen $dF = \omega$. Om nämligen

$$P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ och } Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

så ser vi att

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Detta ger alltså ett nödvändigt villkor för att det ska finnas en primitiv funktion. Däremot är det inte tillräckligt, som vi ska se senare.

Exempel I exemplet ovan har vi

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + y^2) = 3x^2 + 2y = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy + 3y),$$

så det nödvändiga villkoret är uppfyllt så det är lönt att försöka hitta en primitiv funktion.

Exempel För differentialformen

$$2x(1 - (x^2 + 3y^2))dx + 2y(3 - (x^2 + 3y^2))dy$$

gäller att

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -12xy \neq -4xy = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Det finns därför ingen primitiv funktion till den.

Egenarbete

Lös **4.45**.

Rörelse i tid och rum

Detta avsnitt är kursivt och kommer troligen inte att gås igenom på föreläsningen. Det är till för att motivera vissa differentialekvationer från en enkel princip om massbalans.

Partiklar rör sig längs en endimensionell "väg" med koordinat x. Inför två storheter:

1. $\rho(x,t)$ som ger densiteten av partiklar (antal/längdenhet) i punkten x vid tiden t
2. $q(x,t)$ som anger flödet av partiklar, alltså antalet partiklar som passerar punkten x (med tecken) vid tiden t (enhet: antal/tidsenhet).
3. $k(x,t)$ som anger antalet partiklar som tillkommer (positivt) eller försvinner (negativt) per tidsenhet i punkten x vid tiden t.

Anmärkning Om vi vet vilken hastighet $u(x,t)$ partiklarna i (x,t) har, så gäller att

$$q(x,t) = \rho(x,t)u(x,t).$$

I ett intervall $[a,b]$ gäller då att

$$\text{antalet partiklar} = N(t) = \int_a^b \rho(x,t)\,dx$$

och att flödet *in* i intervallet är

$$q(a,t) - q(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\,dx.$$

Massbalans ger nu att

$$N'(t) = q(a,t) - q(b,t) + \int_a^b k(x,t)dx,$$

vilket betyder att (om vi får flytta in tidsderivatan)

$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\,dx = \int_a^b (-\frac{\partial q}{\partial x}(x,t) + k(x,t))\,dx.$$

Men detta är sant för alla intervall, och låter vi intervallet krympa till en punkt (alternativt deriverar m.a.p. b) så får vi ekvationen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial q}{\partial x}(x,t) + k(x,t).$$

Detta är en allmän massbalansekvation som relaterar densitet till flöde och tillförsel/frånförsel. Om vi känner hastigheten blir den

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + k,$$

och om denna är känd blir detta en partiell differentialekvation i ρ.

Första ordningens partiella differentialekvationer

Betrakta ett stort antal bilar på en oändligt lång väg som saknar på- och avfarter. Antag att trafiken flyter med jämn hastighet c. Enligt ovan ges då biltätheten av ekvationen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Antag vidare att vid tiden $t = 0$ är biltätheten $\rho_0(x)$ (dvs $\rho(x,0) = \rho_0(x)$). Hur ser då biltätheten ut vid en senare tidpunkt.

En stunds eftertanke talar om för oss att den måste vara $\rho(x,t) = \rho_0(x-ct)$ – varför?

Ett annat sätt man kan lösa problemet på är att göra ett variabelbyte från (x,t) till (y,s):

$$\begin{cases} y = x - ct \\ s = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + cs \\ t = s \end{cases}.$$

Då vet vi att

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x}dx + \frac{\partial \rho}{\partial t}dt = \frac{\partial \rho}{\partial x}d(y+cs) + \frac{\partial \rho}{\partial t}ds = \frac{\partial \rho}{\partial x}dy + (c\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t})ds.$$

Ur detta följer (varför?) att

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

så $\rho(y,s)$ beror inte på s och alltså $\rho(y,s) = \rho(y,0) = \rho(x,0) = \rho_0(x)$. Det följer att

$$\rho(x,t) = \rho_0(x-ct),$$

som intuitionen sade oss.

Exempel Betrakta en organisk förorening som släpps ut från en fabrik och som rör sig medströms längs en flod, vilken rinner med konstant hastighet. Vi antar att föroreningen är homogent fördelad i alla riktningar utom längs flodens förlopp och att den bryts ner av i floden förekommande bakterier med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier. Detta ger oss en massbalansekvation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu\rho.$$

Vi kan lösa den med samma variabelbyte som ovan, fast nu får vi att

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\mu\rho.$$

Men detta är för fixt y en ekvation i s som vi kan lösa och få $\rho(y,s) = \rho(y,0)e^{-\mu s}$. Går vi tillbaka till de ursprungliga variablerna får vi

$$\rho(x,t) = \rho_0(x-ct)e^{-\mu t}.$$

Också detta är lätt att inse inuitivt.

Vågekvationen

En ekvation som är ofta förekommande i "verkligheten" är den s.k. vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

där c är en hastighet (kolla enheter!). Vi kan skriva denna (kontrollera!) som

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})u = 0.$$

Detta motiverar oss att införa nya variabler:

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}.$$

Då har vi

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}d\eta = (\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})dx + c(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi})dt$$

så

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}).$$

Men då följer (tänk noga igenom dessa räkningar, likhet för likhet)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta})(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}) =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

P.s.s. ser vi (kontrollera själv!)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}).$$

Det följer att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},$$

så uttryckt i (ξ,η) gäller att ekvationen blir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Denna kan vi lösa (gör det!): $u(\xi,\eta) = F(\eta) + G(\eta)$ vilket betyder att

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

Egenarbete

Härledningen och resultatet för vågekvationen är så viktigt att du bör repetera det till du kan härleda det i sömnen. Tekniken som används kan användas på många andra problem. Lös först **4.50** för att se hur själva variabelbytet kan ge en lösning. Gör sedan **4.55, 4.59** för att se hur det fungerar med andraderivator och variabelbyten. Slutligen tar du dig igenom **4.62**.

Värmelednings- och diffusionsekvationen

En helt annan typ av problem löses genom att man gör ett annat antagande i massbalansekvationen:

$$u(x,t) = -D \text{ grad } \rho(x,t).$$

I ord: rörelsen sker i den riktning där partikelkoncentrationen minskar fortast. Detta antagande leder till att vi får en ekvation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + k,$$

där D är en konstant (den behöver inte vara det, men då blir ekvationen lite annorlunda (hur?)) och funktionen k är som tidigare. Med $k = 0$ kallas denna omväxlande Värmeledningsekvationen och Diffusionsekvationen.