

Innehåll: Mer om optimering

- 1) Optimering på icke-kompakta områden
- 2) Optimering med bivillkor för funktioner av tre variabler

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- optimera på icke-kompakta områden
- känna till hur Lagranges metod fungerar

Optimering på icke-kompakta områden (5.3 s165-170)

Att lösa sådana problem innebär att vi kombinerar optimering på kompakta mängder med gränsvärdesanalyser av funktioner.

Exempel Avgör om funktionen $f(x, y) = (x + 2y)e^{-x^2 - y^2}$ har något största eller minsta värde (när $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

Vi ser här att exponentialfunktionen garanterar att funktionen går mot noll då vi låter punkten "gå mot oändligheten", oavsett hur vi gör detta. Idén är därför att

1. Hitta ett stort R sådant att vi är utanför cirkelskivan med medelpunkt i origo och radien R så är funktionen garanterat liten till sitt absolutbelopp
2. Optimera funktionen i det kompakta området $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Dock ska vi, av skäl som snart framgår, göra det i omvänd ordning.

Först bestämmer vi alla stationära punkter (och ev. punkter där funktionen inte är differentierbar):

$$\begin{cases} e^{-x^2 - y^2} + (x + 2y)e^{-x^2 - y^2}(-2x) = 0 \\ 2e^{-x^2 - y^2} + (x + 2y)e^{-x^2 - y^2}(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x + 2y) = 1 \\ 2y(x + 2y) = 2 \end{cases}.$$

Dividerar vi ekvationerna med varandra ser vi att $y = 2x$ och stoppar vi in det i den första finner vi de stationära punkterna $\pm(1, 2)/\sqrt{10}$. Motsvarande funktionsvärden är $\pm 5/\sqrt{10}e$.

Om vi nu kan hitta ett R sådant att om vi tar en punkt utanför cirkeln med medelpunkt i origo och radien R , så kommer f till sitt absolutbelopp vara mindre än $5/\sqrt{10}e$, så har vi hittat det största och minsta värdet av funktionen.

För att se vad som händer långt borta är det bekvämt att använda sig av polära koordinater. Vi har

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = |r \cos \theta + 2r \sin \theta|e^{-r^2} \leq 3re^{-r^2}.$$

Men när $r \rightarrow \infty$ gäller att detta går mot noll. Om vi därför väljer R så att om $r > R$ så gäller att $3re^{-r^2} < 10^{-5}$ (för att nu ta i rejält!) så vet vi att funktionen har sitt största och minsta värde i cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Vi är färdiga med detta (varför behöver vi inte undersöka randen?).

Anmärkning Det lönar sig inte i alla uppgifter, men man ska ägna någon tanke åt att titta på problemet i något annat lämpligt koordinatsystem, i det här fallet polära koordinater. Vi har då

$$f(r, \theta) = (\cos \theta + 2 \sin \theta)re^{-r^2}.$$

Differentialens invarians säger ju att df är samma sak om vi räknar i x, y eller r, θ , så de stationära punkterna ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} = (1 - 2r^2)e^{-r^2}(\cos \theta + 2 \sin \theta) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = re^{-r^2}(-\sin \theta + 2 \cos \theta) = 0 \end{cases}.$$

Den första har lösningen $r = 1/\sqrt{2}$ och den andra de vinklar som uppfyller att $\tan \theta = 2$. De punkter som har denna vinkel har formen

$t(1, 2)$ och kombinerar vi det med att vi bestämt radien (rita figur!) så ser vi att vi får precis samma resultat som ovan.

Enda problemet med polära koordinater här är att vi måste undersöka origo separat (varför?). Men vi har $f(0, \theta) = 0$, så det ändrar ingenting.

Undersökningen "i oändligheten" är nu mer direkt, men samma.

Exempel Bestäm ev. största och minsta värde av $f(x, y) = x^2e^{-x-y}$ i området $\{(x, y); x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}$.

Här kan vi ta ut kompakta delmängder genom att skära av med linjen $x = a$. Angående stationära punkter ser vi att den partiella derivatan m.a.p y kan bara vara noll på randen $x = 0$, så det finns inga inre stationära punkter. På positiva x -axeln är funktionen x^2e^{-x} som endast har stationär punkt i $x = 2$ (varför inte $x = 0$?), vilken man ser är ett lokalt max. Värdet i den punkten är $4e^{-2}$. På randen biten där $x = 0$ är funktionen 0 och på randbiten där $y = 2$ är den en faktor e^{-2} så stor (alltså mindre) än vad den är på x -axeln. När $x = a$ är den $a^2e^{-a}e^{-y} \rightarrow 0$ då $a \rightarrow \infty$, varför vi ser att $f_{\max} = 4e^{-2}$ och $f_{\min} = 0$.

När vi tittar igenom denna lösning ser vi att vi har ett enklare resonemang. På en linje $x = a$, $0 \leq y \leq 2$, varierar värdet mellan a^2e^{-a} och a^2e^{-a-2} . Det största värdet i området fås därför när a^2e^{-a} är som störst, vilket analysen ovan visade var $4e^{-2}$. Det minsta värdet är uppenbarligen noll, då $a = 0$; alla andra värden är positiva!

Egenarbete

Lös 5.31. Glöm inte att rita upp funktionens definitionsområde!

Optimering med bivillkor av funktioner med tre variabler (5.4 s176-180)

Exempel Bestäm största värdet av $f(x, y, z) = x + y^2 + z$ på enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Vi börjar med att konstaterar att enhetssfären är en kompakt mängd och f en kontinuerlig funktion, så ett största värde finns.

Analogt till tvåvariabelfallet har vi våra lokala extrempunkter i de punkter p där tangentplanen sammanfaller. Men om de sammanfaller måste tangentplanen sammanfalla och alltså differentialerna vara proportionella (Lagranges metod):

$$df(p) = \lambda dg(p),$$

där $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Detta kan också uttryckas som att (normalerna ska vara proportionella)

$$\text{grad } f(p) = \lambda \text{ grad } g(p).$$

I det här fallet kan vi inte uttrycka det i form av en determinant, så vi får skriva upp ekvationssystemet:

$$1 = \lambda 2x, \quad 2y = \lambda 2y, \quad 1 = \lambda 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Första och tredje ekvationen visar att $z = x$ och den andra att då måste $y = 0$ eller $\lambda = 1$. Med $y = 0$ ger insättning i bivillkoret de två punkterna $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Fallet $\lambda = 1$ ger att $x = z = 1/2$ och bivillkoret sedan att $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funktionsvärdena för de första två är $\pm \sqrt{2}$ och de sista två $3/2$. Det senare blir därför svaret.

Notera att grad $g \neq (0, 0, 0)$ på enhetssfären.

Anmärkning Just det här problemet kan lösas med två-variabel teknik. Om vi stoppar in $y^2 = 1 - x^2 - z^2$ i funktionsuttrycket får vi en funktion $g(x, z) = x + 1 - x^2 - z^2 + z$ som ska optimeras på området $x^2 + z^2 \leq 1$ (det kräver lite tankearbete!!). Om vi sedan går över till polära koordinater får vi en funktion

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1 + r(\cos \theta + \sin \theta) - r^2 =$$

$$1 + r\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - r^2 = -(r-a)^2 + 1 + a^2, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

där $a = \sin(\theta + \frac{\pi}{4})/\sqrt{2}$. Största värdet av detta är när $r = a$ och är då lika med $1 + a^2$, och det största värde det kan anta är när $a = 1/\sqrt{2}$, vilket ger svaret $3/2$.

Exempel Mellan vilka värden varierar z på kurvan $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$. (Tänkt först ut vad det är för sorts kurva!)

Vi ska bestämma värdemängden för funktionen $f(x, y, z) = z$ under bivillkoren $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ och $g_2(x, y, z) = x + 2y + 2z = 0$.

I en lokal extrempunkt gäller att tangenten till kurvan ligger i tangentplanet till f i den punkten. Men tangenten till kurvan är vinkelrät mot både grad g_1 och grad g_2 ; vektorprodukten av dessa ger riktningen på tangenten. Men det följer att villkoret för en lokal extrempunkt är att gradienterna av f, g_1, g_2 är linjärt beroende. Vi vet från linjär algebra att det i sin tur betyder att determinanten av dessa är noll. I vårt fall får vi

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Stoppar vi in detta i bivillkoren får vi ekvationerna $5x^2 + z^2 = 1$, $5x + 2z = 0$, och ur detta kan vi lösa ut punkterna $\pm \frac{\sqrt{5}}{15}(2, 4, -5)$. z kommer därför att variera i $[-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$.

Egenarbete

Lös 5.42. Lösningarna ger en metod – kan du hitta en annan som överför problemet på en optimering över ett kompakt område? Lös den på det sättet också. Vilket sätt är enklast? Lös sedan **5.45**.