Föreläsning 7

Innehåll: Optimering på kompakta områden, med och utan bivillkor

Kapitel 5.3–5.4

1) Optimering på kompakta områden
2) Optimering med bivillkor

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- Kunna hitta extrempunkter över ett kompakt område (med inre punkter)
- Optimera med bivillkor

Optimering på kompakta områden (5.3 s162-165)

Denna är helt analog med vad vi gjorde i endim. Vi utgår ifrån två satser:

1. En funktion som är kontinuerlig på ett kompakt område antar sitt största och minsta värde.
2. En lokal extrempunkt *som är en inre punkt* är en stationär punkt om funktionen är differentierbar där.

Liksom vi i endim titta på (1) stationära punkter i det inre av intervallet, (2) punkter där funktionen inte var differentierbar i det inre av intervallet och (3) randpunkter, får vi här titta på (1) stationära punkter i det inre, (2) punkter där funktionen inte är differentierbar i det inre och (3) randen. I flera dimensioner är randen mer komplicerad än vad den är i endim, och analys av den utgör en stor del av arbetet. Steg ett måste alltid vara att rita upp det område man ska optimera över!

Exempel Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2 + x(y^2-1)$ i cirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$.

1. Först konstaterar vi att funktionen är differentierbar överallt.
2. De stationära punkterna bestäms, genom att vi löser

$$2x + (y^2-1) = 0, \quad 2xy = 0,$$

   till $(0,1)$, $(0,-1)$ och $(1/2,0)$. Den enda av dessa som är inre punkt är den sista. Värdet i den punkten är $-1/4$.
3. Undersökning av randen $x^2+y^2=1$ kan göras på många olika sätt. Ett är att reducera det till endim-problem. För det parametriserar vi randen:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$$

   och stoppar in det i uttrycket:

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \cos t(\sin^2 t - 1) = \ldots = \cos^2 t(1-\cos t).$$

   Sedan kan vi analysera detta med endim-metoder, men i det här fallet ser vi att det måste ha värden mellan 0 och 2; 0 då $\cos t = 0$ eller $\cos t = 1$ och 2 då $\cos t = -1$. På randen antas alltså alla värden i intervallet $[0,2]$.

Vi kan nu sammanfatta resultatet:

$$f_{\min} = -\frac{1}{4}, \quad f_{\max} = 2.$$

Anmärkning I just det här speciella fallet finns ett ännu enklare sätt att undersöka randen. Stoppa in $y^2 = 1-x^2$ i f så ser vi att vi ska hitta max och min av

$$g(x) = x^2 - x^3, \quad -1 \le x \le 1.$$

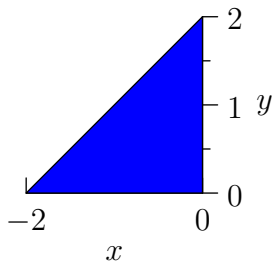
Denna har stationära punkter i $x=0$ och $x=2/3$ samt ändpunkter i $x=\pm 1$. Det kan vara värt att komma ihåg när vi bestämmer dessa på ett mycket krångligare sätt längre ner.

Rand-analysen kan vara mer komplicerad:

Exempel Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2y - 3xy + 2x - 4y$ i området D som ges av villkoren

$$0 \le y - x \le 2, \quad -2 \le x \le 0, \quad y \ge 0.$$

Efter att ha ritat upp området



gör vi analysen enligt strategin ovan:

1. Först konstaterar vi att funktionen är differentierbar överallt.
2. De stationära punkterna bestäms, genom att vi löser

$$2xy - 3y + 2 = 0, \quad x^2 - 3x - 4 = 0.$$

   Andra ekvationen har lösningarna $-1, 4$, av vilka den senare ligger utanför triangeln. För $x=-1$ får vi $y = 2/5$ och punkten $(-1, 2/5)$ ligger i det inre av D. Värdet i den punkten är -2.
3. Randen består av triangelns tre sidor (med hörn), och här måste vi undersöka var del för sig:
   (a) På $y=0$, $-2 \le x \le 0$ gäller att funktionsvärdet är $2x$, som tar värden i $[-4,0]$.
   (b) På $x=0$, $0 \le y \le 2$ gäller att funktionsvärdet är $-4y$ som tar värden i $[-8,0]$.
   (c) På hypotenusan $y = x+2$, $-2 \le x \le 0$ gäller att funktionsvärdet är

$$f(x, x+2) = \ldots = x^3 - x^2 - 8x - 8.$$

   Problemet är därför reducerat till att hitta största och minsta värde av funktionen

$$g(x) = x^3 - x^2 - 8x - 8,\ -2 \le x \le 0.$$

   Lite räkningar visar att enda stationära punkt i området är $x = -4/3$, vars värde är $-40/27$. Ändpunkterna har värden -4 och -8 (vilket vi redan visste, varför?).

Vi kan sammanfatta resultatet:

$$f_{\min} = -8, \quad f_{\max} = 0.$$

Egenarbete

Optimering över kompakta områden är väldigt algoritmiskt och ofta räkneintensivt (trots att vi slipper bestämma typ av stationär punkt). Gå först igenom **5.18** och jämför dina räkningar med facits. Gör därefter **5.20** "så det sitter".

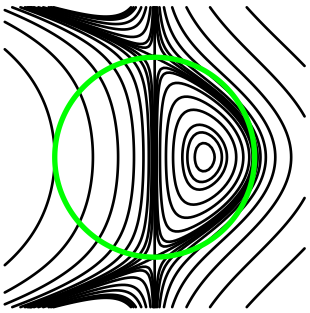
Optimera med bivillkor (5.4)

Att hitta extrempunkter på en rand är ofta ett exempel på optimering med bivillkor (av funktioner i två variabler), dvs lösa problemet

> Hitta maximum och minimum av funktionen $f(x,y)$, givet att (x,y) ligger på en kurva $g(x,y)=0$.

För att illustrera hur man hittar dessa extrempunkter återgår vi vill första exemplet ovan.

Exempel Vi ska bestämma de lokala extrempunkterna till $f(x,y) = x^2 + x(y^2-1)$ under bivillkoret $x^2+y^2 = 1$. I bilden nedan är nivåkurvor till f utritade tillsammans med bivillkoret som den gröna cirkeln.



För att vi ska ha ett lokalt maximum i en punkt p på cirkeln måste vi först gå upp och sedan ner när vi rör oss genom punkten på cirkeln. Det betyder att cirkeln måste tangera nivåkurvan ifråga, vilket betyder att de ska ha samma tangent. Men cirkeln är också en nivåkurva, nämligen till funktionen $g(x,y) = x^2+y^2$, så att de två kurvorna har samma tangent betyder att differentialerna i punkten är proportionella:

$$df(p) = \lambda dg(p)$$

för någon konstant λ. Detta kan också uttryckas som att

$$\text{grad } f(p) = \lambda \text{ grad } g(p)$$

(alltså att normalerna till tangenterna är proportionella). Geometriskt betyder det att arean av det parallellogram som spänns upp av grad $f(p)$ och grad $g(p)$ är noll, och från den linjära algebran vet vi att det betyder att en determinant är noll.

Anmärkning Notera att alla vektorer är proportionella mot nollvektorn! Måste tas hänsyn till i räkningarna.

Vi har att grad $f(x,y) = (2x+y^2-1, 2xy)$ och grad $g(x,y) = 2(x,y)$, och arean (med tecken) av parallellopgrammet ges då av

$$\begin{vmatrix} 2x+y^2-1 & 2xy \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy + 2y^3 - 2y - 4x^2y.$$

Men vi vet också att $x^2+y^2=1$, så

$$2y(2x+y^2-1-2x^2) = 2xy(2-3x).$$

Ur detta får vi följande punkter där gradienterna är parallella: $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3})$. Motsvarande värden är

$$f(1,0) = f(0,\pm 1) = 0,\ f(-1,0) = 2,\ f(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}) = \frac{8}{27}.$$

Vi får alltså att värdemängden är $[0,2]$, precis som ovan.

Anmärkning Kan du från figuren bestämma vilka punkter som är lokala maxima och minima för f?

Anmärkning I exemplet utnyttjade vi linjära algebran för att omformulera villkoret. Utan omformulering innebär villkoret på differentialerna att (vi kan skippa 2:an, varför?)

$$\begin{cases} 2x+y^2-1 = \lambda x, \\ 2xy = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x + y^2 = 1, \\ y(2x-\lambda) = 0 \end{cases}.$$

Lägg märke till att detta är två ekvationer och tre obekanta. Men vi har en ekvation till som ska gälla: $x^2+y^2=1$. Så det totala ekvationssystemet är

$$\begin{cases} 2x+y^2-1 = \lambda x, \\ 2xy = \lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x + y^2 = 1, \\ y(2x-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}.$$

Den andra ekvationen säger att antingen är $y=0$ eller $x = \lambda/2$. Vi behandlar de två fallen för sig:

1. Om $y=0$ så är $x = \pm 1$ enligt sista ekvationen. Vidare ska $(2-\lambda)x = 1$, vilket bestämmer λ i de två fallen. Men den intresserar oss inte, utan vi har de två punkterna $(\pm 1, 0)$.
2. Om $x = \lambda/2$ så kan vi sätta in y^2 från sista ekvationen i första och sedan x-värdet. Det ger oss att

$$(2-\lambda)\lambda/2 + 1 - \lambda^2/4 = 1 \Leftrightarrow \lambda(3\lambda - 4) = 0.$$

Fortsätt analysen!

Exempel Bestäm största och minsta avstånd från kurvan $x^3+y^3 = 1,\ x \geq 0, y \geq 0$ till origo.

Eftersom avståndet i kvadrat från (x,y) till origo enligt Pythagoras sats ges av $f(x,y) = x^2+y^2$ är det denna funktion vi ska hitta största och minsta värde på under bivillkoret som ges av kurvan (lägg märke till att det är en kurva med ändpunkter).

Inre punkter på kurvan analyseras genom villkoret att gradienten av f och gradienten av $g(x,y) = x^3+y^3-1$ ska vara parallella. Lite räkningar ger att villkoret blir

$$\begin{vmatrix} 2x & ry \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix} = 6xy(y-x) = 0,$$

tillsammans med $x^3+y^3=1,\ x \geq 0, y \geq 0$. Enda inre aktuell punkt är när $y=x$ och då blir villkoret att $x^3 = 1/2$, vilket alltså ger punkten $(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}})$, en punkt i vilken funktionen har värdet $2^{\frac{1}{3}}$.

Vidare måste vi undersöka randpunkterna $(1,0)$ och $(0,1)$ till kurvan. Värdena i dessa punkter är båda 1. Vi ser alltså att avståndet varierar mellan 1 och $2^{\frac{1}{6}}$.

Egenarbete

Lös först **5.37** innan du tittar på lösningen. Notera att det fanns två sätt att lösa uppgiften på. Se till att du förstår båda!