

Innehåll: Stationära punkter och deras typ

Kapitel 5.2

1. Stationära punkter
2. Tillräckliga villkor för lokala extrempunkter

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- beräkna ett Taylorpolynom av andra ordningen till en reellvärd funktion
- använda detta för att avgöra vilken typ en stationär punkt är av

Stationära punkter (5.2 s150-155)

Geometriskt inser vi nu att en punkt kan vara ett lokalt maximum eller minimum till en funktion f av två variabler endast då tangentplanet i punkten är parallellt med xy -planet, alltså har ekvationen $z = z_0$. Men tangentplanetns ekvation var

$$z = z_0 + df(a, b)[x - a, y - b] \quad (\text{där } z_0 = f(a, b))$$

vilket betyder att vi måste ha $df(a, b) = 0$ i en sådan punkt. Punkter där differentialen är noll kallas stationära punkter.

Anmärkning Ett icke-geometriskt bevis bygger på att varje riktningsderivata $df(a, b)[v]$ måste vara noll i en lokal extrempunkt (samma resonemang som i endim, fast i alla riktningar).

Exempel Vi har sett att för funktionen $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ gäller att dess differential är

$$df(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(2x(1 - (x^2 + 3y^2))dx + 2y(3 - (x^2 + 3y^2))dy).$$

De stationära punkterna till funktionen får vi genom att sätta differentialen till noll, och eftersom exponentialfunktionen aldrig är noll betyder det att:

$$x(1 - (x^2 + 3y^2))dx + y(3 - (x^2 + 3y^2))dy = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(1 - (x^2 + 3y^2)) = 0 \\ y(3 - (x^2 + 3y^2)) = 0 \end{cases}.$$

De stationära punkterna är de som löser detta system. Varje ekvation består av en produkt av två faktorer, vilket ger oss totalt fyra fall. Men ett är omöjligt: vi kan inte både ha att $x^2 + 3y^2$ är 1 och 3. Vi har alltså följande fall

$$\begin{cases} x = 0 \text{ och } y = 0 \\ x = 0 \text{ och } x^2 + 3y^2 = 3 \\ x^2 + 3y^2 = 1 \text{ och } y = 0 \end{cases}.$$

Totalt får vi fem stationära punkter: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.

Vi ser alltså att för att hitta en stationär punkt av en funktion av två variabler behöver vi lösa ett ekvationssystem om två ekvationer. Liksom i endim:en behöver inte en stationär punkt vara en lokal extrempunkt, men den diskussionen återkommer vi till.

Tillräckliga villkor för lokala extrempunkter (5.2 s157-162)

Om (a, b) är en stationär punkt till $f(x, y)$, så gäller att

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}Q(a, b)[h, k] + \text{litet}$$

där det lilla kan försummas om den kvadratiske formen är definit eller indefinit (men inte om den är semidefinit) om bara h, k är tillräckligt små. Vi ser då att

1. Om $Q(a, b)[h, k]$ är positivt definit så är (a, b) ett lokalt minimum
2. Om $Q(a, b)[h, k]$ är negativt definit så är (a, b) ett lokalt maximum
3. Om $Q(a, b)[h, k]$ är indefinit så är (a, b) inte en lokal extrempunkt.

I det tredje fallet säger man att (a, b) är en sadelpunkt.

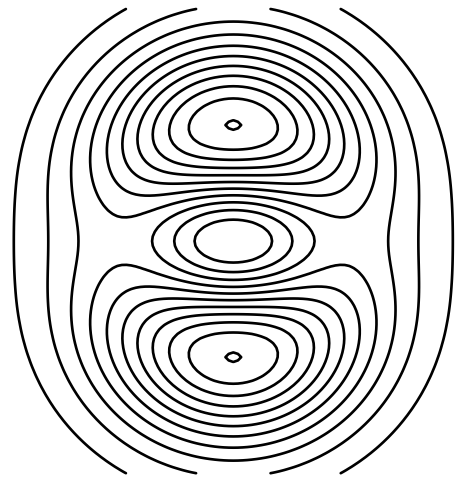
Exempel För funktionen $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ har vi tidigare bestämt de stationära punkterna till $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. Vidare har vi beräknat andraderivatorna för funktionen ovan, från vilket vi kan räkna ut den kvadratiske formen i var och en av dessa punkter:

$(0, 0)$: I origo har vi $Q(0, 0)[h, k] = 2(h^2 + 3k^2)$ som uppenbarligen är positiv då $(h, k) \neq (0, 0)$. Det följer att origo är ett lokalt minimum.

$(0, \pm 1)$: I dessa punkter gäller att $Q(0, \pm 1)[h, k] = -2e^{-1}(2h^2 + 3k^2)$, som uppenbarligen är negativ då $(h, k) \neq (0, 0)$. Dessa punkter är därför båda lokala maxima.

$(\pm 1, 0)$: I dessa punkter gäller att $Q(\pm 1, 0)[h, k] = 2e^{-1}(-2h^2 + 2k^2)$ som uppenbarligen kan anta både positiva och negativa värden; dessa punkter är sadelpunkter.

Kan du hitta dessa punkter ifrån nivåkurveplotten nedan, utan att vi lägger ut ett koordinatsystem? Hur ser nivåkurvorna ut till de kvadratiske formerna?



Exempel Vi ska bestämma alla lokala extrempunkter till $f(x, y) = -2y^2 - 4xy - x^4$. Differentialen är

$$df = -4(y + x^3)dx - 4(y + x)dy$$

så de stationära punkterna ges av ekvationerna

$$y + x^3 = 0, \quad y + x = 0,$$

och löser vi detta får vi punkterna $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$. Ytterligare derivation ger oss den "allmänna" kvadratiske formen

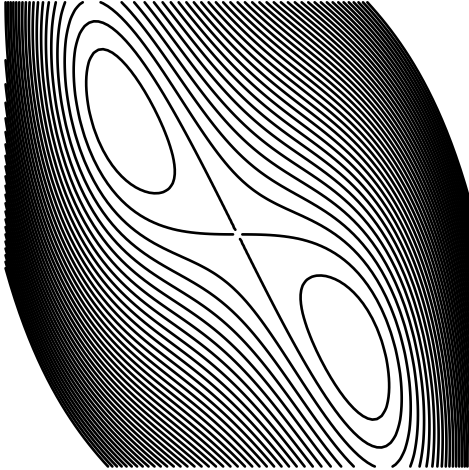
$$Q(x, y)[h, k] = -12x^2h^2 - 8hk - 4k^2$$

vilken räknas ut i de tre stationära punkterna:

1. $Q(0, 0)[h, k] = -8hk - 4k^2 = -4((k + h)^2 - h^2)$, vilken är indefinit, så origo är en sadelpunkt
2. $Q(1, -1)[h, k] = -12h^2 - 8hk - 4k^2 = -4(k + h)^2 - 8h^2$, vilken är negativt definit, så $(1, -1)$ är ett lokalt maximum
3. $Q(-1, 1)[h, k] = Q(1, -1)[h, k]$, så även den punkten är ett lokalt maximum.

Svar: Punkterna $(1, -1)$ och $(-1, 1)$ är de enda lokala extrempunkterna och båda är lokala max.

Kan du hitta dem i figuren nedan? Kan du föreställa dig ytan?



Anmärkning Kan vi ha en överallt deriverbar funktion av en variabel som har två lokala max, men inget lokalt min? Det finns mer utrymme i två dimensioner, och det som gäller i en måste inte gälla i högre dimensioner!

Anmärkning Principerna som beskrivits ovan gäller även för funktioner av fler än två variabler. För funktioner av tre variabler betyder det att vi måste analysera kvadratiska former av tre variabler. Det är då mycket viktigt att man genomför kvadratkompletteringarna på ett systematiskt sätt!

Egenarbete

Gå nu igenom hela processen själv: 5.7 och 5.8 (två gånger är minsta antalet).