

Innehåll: Högre derivator och kvadratiske former

Kapitel 4.6, 5.1, 5.2 (s 155-157)

- 1) Andraderivator och vidare
- 2) Taylorutveckling

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- beräkna ett Taylorpolynom av andra ordningen till en reellvärd funktion
- använda detta för att avgöra vilken typ en stationär punkt är av

Andraderivator (4.6)

Högre derivator fås genom att man deriverar redan uträknade derivator:

Exempel För funktionen $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ har vi sett att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(1 - (x^2 + 3y^2))e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(3 - (x^2 + 3y^2))e^{-(x^2+y^2)}.$$

Fortsätter vi derivera får vi att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-(x^2+y^2)}(1 - 5x^2 + 2x^4 - 3y^2 + 6x^2y^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4e^{-(x^2+y^2)}(x^3y + 3xy^3 - 4xy),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4e^{-(x^2+y^2)}(x^3y + 3xy^3 - 4xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{-(x^2+y^2)}(3 - x^2 - 9y^2 + 2x^2y^2)$$

Vi noterar här att de två blandade derivatorna är lika. Det är (nästan) alltid sant.

Sats Om vi kan derivera funktionen f två gånger och derivatorna blir kontinuerliga, så gäller att de blandade andra-derivatorna är lika.Vi kan alltså skriva $\partial^2 f / \partial x \partial y$ utan att bry oss om ordningen på x och y . För beviset, se boken.

Egenarbete

Att beräkna högre derivator är bara tekniskt besvärligt. Gör 4.54.

Andra ordningens Taylorutveckling (5.1)

För att få en Taylorutveckling av en funktion i två variabler lutar vi oss mot endim:en. Skriv

$$\phi(t) = f(a + th, b + tk).$$

Om lämpligt deriverbar vet vi då att (h, k) är små

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Här har vi:

$$\phi(1) - \phi(0) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + th, b + tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + th, b + tk)k$$

$$\phi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$

där andraderivatorerna i högerledet räknas ut i punkten $(a + th, b + tk)$.

Ur detta följer nu:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = df(a, b)[h, k] + \frac{1}{2}Q(a + \theta h, b + \theta k)[h, k]$$

där

$$Q(a, b)[h, k] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2.$$

Egenarbete

Gör 5.1 så att du bekantar dig med Taylorpolynom av 2:a ordningen (vad är Taylorpolynom av 1:a ordningen?).

Kvadratiske former (5.2 s155-157)

 $Q(a, b)[h, k]$ är en kvadratisk form i h, k , alltså ett uttryck på formen

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2,$$

och genom att kvadratkomplettera den ser vi att det i princip (vad det betyder här, se nedan) händer en av tre olika saker

1. $Q(h, k)$ är positiv för alla $(h, k) \neq (0, 0)$. Då sägs den kvadratiske formen vara positivt definit.
2. $Q(h, k)$ är negativ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$. Då sägs den kvadratiske formen vara negativt definit.
3. $Q(h, k)$ kan anta både positiva och negativa värden. Då sägs den kvadratiske formen vara indefinit.

Sedan finns det några gränssfall också, såsom att Q är icke-negativ, men kan vara noll även utanför origo. Vi pratar därför om positivt och negativt semidefinita kvadratiske former också.

För att avgöra vilken typ en kvadratisk form har, kvadratkompletterar man:

Exempel Några exempel:

$$h^2 + hk + k^2 = (h + k/2)^2 + 3k^2/4 \Rightarrow \text{positivt definit},$$

$$h^2 + 2hk + k^2 = (h + k)^2 \Rightarrow \text{positivt semidefinit}$$

(ty den är noll då $h + k = 0$)

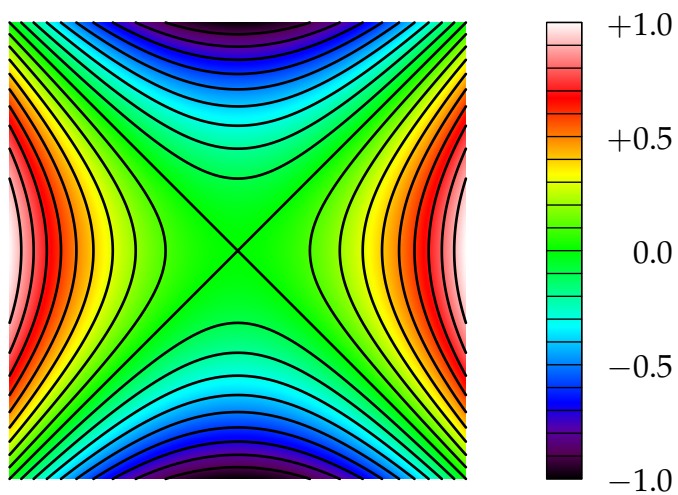
$$-h^2 + 4hk - 3k^2 = -(h - 2k)^2 + k^2 \Rightarrow \text{indefinit},$$

Egenarbete

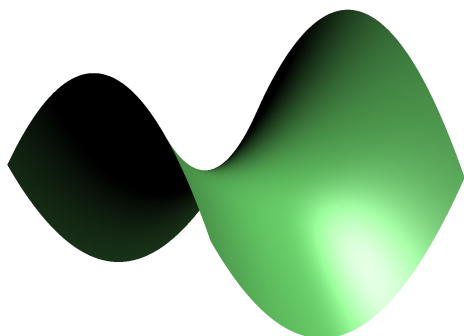
Att kunna avgöra typ för kvadratisk form är viktigt. Det handlar bara om kvadratkomplettering. Gör 5.5 och 5.6. Den senare är i tre variabler – men det gör ingen skillnad.

Olika sorters sadelpunkter

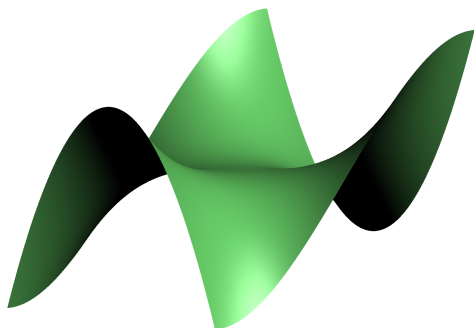
Hur ser ytan $z = x^2 - y^2$ ut? Nivåkurvorna med värmeindikator är



från vilket vi kan utläsa att ytan bör se ut som en sadel:



En annan sorts sadel är den s.k. apsadeln, i vilken man ska ha plats inte bara för två ben utan även svans:



Denna yta ges av ekvationen $z = x^3 - 3xy^2$. Vilken typ har den kvadratiske formen i den stationära punkten i origo? Försök att skissera nivåkurvorna.