

Innehåll: Den geometriska tolkningen av differentiablen

Kapitel 4.4

- 1) Rikttningsderivator
- 2) Differential och gradient

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- beräkna riktningsderivator i olika riktningar av funktioner
- den geometriska betydelsen och användbarheten av gradienten

Rikttningsderivator (4.1 s99-102)

Geometrisk åskådning kräver låga dimensioner, så vi kommer att föra diskussionen här med funktioner av två variabler. Dock är allt generaliserbart, om vi bara använder rätt terminologi.

I endimension blev uttrycket $df(a)[v] = f'(a)v$, vilket approximerar ändringen i f när vi går från a till $a + v$. Mer precist är det hur mycket tangenten ändras i y -led då. På samma sätt blir $df(a)[v]$ när f är en funktion av flera variabler en approximation av hur mycket vi ändrar f när vi går från a till $a + v$. Om sträckan vi går är ett (dvs $|v| = 1$) så betyder detta *lutningen i riktningen* v . Mer precist mäter den lutningen av tangentplanet i riktningen v .

Vi kan därför kalla uttrycket $df(a)[v]$ för *rikttningsderivatan av f i punkten a i riktningen v om v har längden ett*. Den betecknas ofta $f'_v(a)$.

Exempel Vi ska beräkna riktningsderivatan i riktningen $(-1, 1)$ av funktionen $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ i punkten $(0, 1)$. För det beräknar vi först en riktningsvektor av längden 1: $e = (-1, 1)/\sqrt{2}$ och sedan differentialen av funktionen:

$$df(x, y) = 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy) \Rightarrow df(0, 1) = 2edy.$$

Rikttningsderivatan fås nu som

$$f'_v(0, 1) = 2e \frac{1}{\sqrt{2}} = e\sqrt{2}.$$

Detta är den fundamentala geometriska betydelsen av differentialen, och utgör bas för den kommande diskussionen.

Egenarbete

Gör uppgift 4.18 så att du räknat ut en riktningsderivata.

Differential och gradient (4.4)

För en funktion av två variabler har vi att

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Det betyder att för vektorn $v = (v_1, v_2)$ gäller att

$$df(a)[v] = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v_2 = \text{grad } f(a) \cdot v,$$

där vi infört beteckningen

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right),$$

vilket är en vektor som kallas gradienten av f i punkten a . Lagg märke till att det är en vektor i planet (inte rummet).

Anmärkning En ofta använd, alternativ, beteckning för gradienten av f är ∇f .

Vi har nu att (med $|v| = 1$)

$$f'_v(a, b) = \text{grad } f(a) \cdot v = |\text{grad } f(a)| \cos \theta$$

där θ är mellanliggande vinkel. Direkta konsekvenser

- Den maximala lutningen på ytan i punkten a är $|\text{grad } f(a)|$
- Riktningen för denna maximal lutning är den av $\text{grad } f(a)$.

Exempel Paul klättrar i ett berg som beskrivs av funktionen $f(x, y) = 5 - x^2 - 2y^2$. Han befinner sig i punkten $(-\frac{3}{2}, -1)$ på kartan och vill klättra i den riktning i vilken stigningen är maximal. Vilken riktning väljer han då?

För att se det beräknar vi först differentialen:

$$df(x, y) = -2xdx - 4ydy,$$

vilket betyder att gradienten i punkten $p = (x, y)$ ges av $\text{grad } f(p) = (-2x, -4y)$ och speciellt alltså för punkten $(-\frac{3}{2}, -1)$ av vektorn $\text{grad } f(-\frac{3}{2}, -1) = (3, 4)$. Detta är därför den riktning Paul ska välja, och den maximala stigningen ges av

$$|\text{grad } f(-\frac{3}{2}, -1)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

En annan och mycket närbesläktad observation handlar om nivåkurvor. Om vi har en parameterframställning av en nivåkurva som $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, så gäller att $f(r(t)) = C$, där C är nivån, för alla t . Om vi deriverar m.a.p. t får vi ekvationen $df(r(t))[r'(t)] = 0$, vilket betyder att riktningsderivatan i tangentens riktning alltid är noll. Översatt till vektorspråk betyder detta att $\text{grad } f(r(t)) \cdot r'(t) = 0$, vilket betyder att gradienten $\text{grad } f(r(t))$ alltid är vinkelrät mot nivåkurvan.

Exempel Paul uppmäter i en viss riktning en stigning (i punkten där han står) på 5%. Sedan vänder han sig 90° moturs och uppmäter en stigning på 12%. Hur ska han nu vända sig för att titta i den riktning där stigningen är maximal?

I ett lämpligt koordinatsystem har han beräknat gradienten till $(5, 12)$, så han ska rotera $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{12}{5} \approx 22.6^\circ$ radianer medurs för att titta i riktningen av maximal stigning. Där är stigningen 13%.

Exempel Vi ska bestämma ekvationen för tangenten i punkten $(1, 5)$ till kurvan $y^2 = x^2 + 4x^3 + 20$. Denna kan skrivas som nivåkurva till funktionen $f(x, y) = y^2 - x^2 - 4x^3$ vid nivån -20 . Vi beräknar först differentialen:

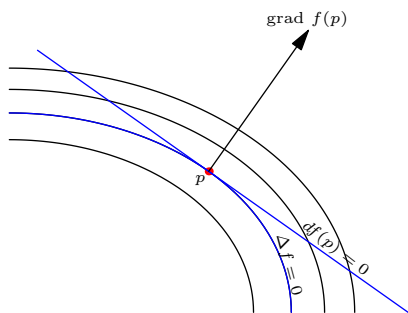
$$df(x, y) = 2ydy - 2xdx - 12x^2dx = -2(x + 6x^2)dx - 2ydy \Rightarrow$$

$$df(1, 5) = -14dx + 10dy.$$

Vi får nu tangenten i punkten $(1, 5)$ genom att sätta df lika med noll och samtidigt ersätta dx med $x - 1$ och dy med $y - 5$:

$$-14(x - 1) + 10(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 7x - 5y = 18.$$

Detta illustreras i nedanstående figur, där $\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(p)$ så att den nivåkurva som går genom p har nivån noll. Tangenten i punkten p får ekvationen $df(p) = 0$, fast i koordinatsystemet $dx = x - p_1$, $dy = y - p_2$ (se exemplet). Normalvektorn, alltså gradienten, är vinkelrät mot tangenten.

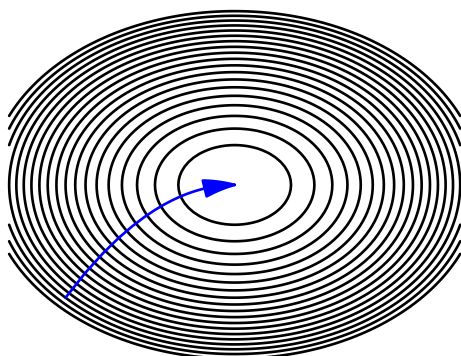


Egenarbete

Se till att du vet vad en gradient är genom att göra 4.16. Dess egenskaper illustreras av 4.22 och 4.34.

Att följa gradienten för att hitta ett lokalt maximum

Paul från exemplet ovan vill klättra ända upp till toppen. Som den klättrare han är vill han hela tiden klättra i den riktning som det är brantast. Han ska då hela tiden klättra i gradientens riktning, vilket betyder att den väg han klättrar ska skära nivåkurvorna vinkelrätt. Detta illustreras i figuren nedan.



Om vi låter $r(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$ beskriva den väg han rör sig, så ska alltså tangenten till denna, $r'(t)$, ha samma riktning som $\text{grad } f(r(t))$, dvs

$$r'(t) = \lambda(t) \text{grad } f(r(t)),$$

där $\lambda(t) > 0$. Om vi tar $\lambda(t) = 1$, så betyder det att för att bestämma vägen ska vi lösa följande system av differentialekvationer:

$$x'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \quad y'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Ibland går det att lösa detta genom att dividera ekvationerna med varandra som nästa exempel visar

Exempel Vi vill bestämma hela den väg vår bergsklättrare ovan ska följa på kartan för att komma till toppen om han hela tiden väljer den väg som går så brant upp som möjligt. Vi hade att $\text{grad } f(x, y) = (-2x, -4y)$ och dividerar vi ekvationerna med varandra får vi att

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-4y(t)}{-2x(t)} \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = 2 \frac{x'(t)}{x(t)}.$$

Detta kan vi integrera till

$$\ln |y(t)| = 2 \ln |x(t)| + C$$

där C bestäms av att han startade i punkten $(-3/2, -1)$ så att $C = \ln |-1| - 2 \ln |-3/2| = \ln \frac{4}{9}$. Vi ser därför (tänk efter varför minustecknet ska vara där!) att

$$y(t) = -\frac{4}{9}x(t)^2.$$

Det följer att kurvan blir

$$y = -\frac{4}{9}x^2, \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq 0$$

(och det är den som är ritad i figuren ovan).

Denna idé kan användas när man vill numeriskt bestämma lokala extrempunkter för komplicerade funktioner som inte kan analyseras som vi gör i den här kursen. Men man bestämmer då inte hela vägen, utan en approximation av vägen i form av en polygonkurva: välj en startpunkt, gå en bit i riktningen av gradienten så långt att du kommit uppför. Stanna där och räkna ut gradienten i den punkten. Gå i den riktningen, igen inte längre än att du säkert går uppför. Osv. Detta är lätt att programmera (ofta får man använda numeriska approximationer av derivatorna, men det fungerar ändå). Metoden kallas "steepest ascent"-metoden och fungerar bra där det är brant, men blir långsam när man närmar sig ett lokalt maximum och ytan plana ut.