

Om att rita 2D funktioner

Introduktion

När man ska analysera funktioner av flera variabler, har man normalt inte hjälp av visuella bilder, som i fallet med funktioner av en variabel, där man kan rita grafen av funktionen. Ett undantag är funktioner av två variabler, och för att förstå räkningarna i den flerdimensionella analysen har man ofta stor hjälp av att ha undersökt funktioner av just två variabler grafiskt.

Detta är vad detta kapitel ska handla om: olika sätt som vi grafiskt kan åskådliggöra funktioner av två variabler och om vad vi kan läsa av i dessa figurer. Motsvarigheten till grafen av en funktion av en variabel, som är en kurva i ett plan, blir en yta i rummet. Närmare bestämt en funktionsyta, vilket är en yta för vilken det bara finns ett z -värde till varje par (x, y) .

Den stora skillnaden mellan analys i en och flera variabler är att i den endimensionella analysen finns det bara en dimension att röra sig i, vilket betyder framåt eller bakåt. I flerdim finns det många fler riktningar, vilket ger mycket större frihet för en yta på hur den kan se ut nära en punkt.

Men alla ytor är inte funktionsytor. T.ex. är enhetssfären inte en funktionsyta. Vi avslutar därför med att kort se hur man kan beskriva ytor på alternativa sätt. Detta kan ske både som en ekvation på formen $f(x, y, z) = 0$ eller med hjälp av s.k. parametriseringar.

Funktionsytor

En funktion av de två variablerna x och y är en regel, kalla den f , som specificerar värdet på funktionen för just dessa värden x och y . Värdet skriver vi $f(x, y)$. Geometriskt kan dessa par x och y representeras av punkter i xy -planet, så en funktion av två variabler kan betraktas som en funktion av punkter i ett plan. Låt f vara en sådan funktion, definierad i ett område Ω i xy -planet.

Motsvarigheten till att skissera grafen $y = f(x)$ av en funktion av en variabel blir då att skissera *ytan* $z = f(x, y)$. Att göra det är emellertid i allmänhet mycket svårare än vad det är för en funktion av en variabel – man ska ju skissera en tvådimensionell mängd, som lever i tre dimensioner, på ett papper, som är två-dimensionellt.

Med hjälp av datorgrafik är det emellertid ofta möjligt att få en någorlunda uppfattning om en funktionsytas utseende. Man ska par då först ett rutnät i definitionsområdet Ω i planet, vilket man sedan deformerar till en yta.

Figuren till höger är en sådan funktionsyta. Den definieras av ekvationen

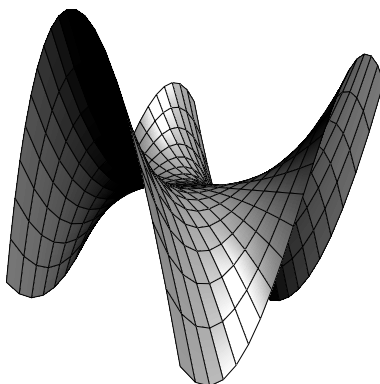
$$z = x^3 - 3xy^2.$$

Rutnätet på ytan har uppkommit genom att man indelat rektangeln

$$\{(x, y); |x| \leq 2, |y| \leq 1.5\}$$

i xy -planet i 20×20 likadana rektanglar och sedan räknat ut funktionens värde i punkterna på detta rutnät. Genom att sedan rita dessa punkter i rummet och förbinda dem med linjer får man en någorlunda bild av hur ytan ser ut. Dock skulle man gärna vilja kunna se den ur olika vinklar, vilket ofta kan åstadkommas i olika ritprogram på dator.

Ett annat sätt att få en uppfattning om hur en funktionsyta ser ut går ut på att man ritar s.k. nivåkurvor. En nivåkurva hörande till nivån c på en funktionsyta är alla punkter (x, y) (i xy -planet!) som är sådana att funktionen antar just värdet c i dessa punkter. Nivåkurvan definieras alltså av ekvationen $f(x, y) = c$. Vilken dock inte alltid



måste ge en riktig kurva, ibland kan det bli en punkt och ibland ett helt område.

Genom att rita ut dessa nivåkurvor för olika höjder (helst med konstant höjdskillnad för att få maximal nytta av dem) får man ett antal kurvor i xy -planet som beskriver ytan på samma sätt som en topografisk karta beskriver topografin i ett naturområde. Man kallar därför definitionsområdet Ω i planet för funktionsytans *karta*. Figuren med nivåkurvor kallas en *nivåkurvegraf*.

Exempel 1.1 Betrakta funktionen

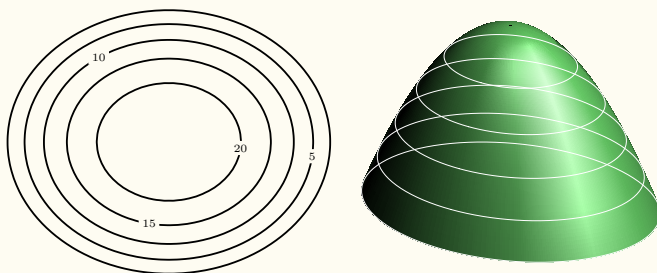
$$f(x, y) = 25 - 2x^2 - 3y^2 \quad \text{där} \quad 2x^2 + 3y^2 \leq 25.$$

Dess karta är området $\Omega = \{(x, y); 2x^2 + 3y^2 \leq 25\}$, vars rand, som ges av ekvationen $2x^2 + 3y^2 = 25$, är en ellips.

Till vänster i figuren nedan har vi en nivåkurvegraf av ytan. Nivåkurvorna, vilka definieras genom ekvationen

$$25 - 2x^2 - 3y^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 3y^2 = 25 - c,$$

då $0 \leq c < 25$, är alla ellipser. Till höger i figuren nedan har vi en datorritad bild av ytan i vilken vi också märkt ut de kurvor på ytan som definierar just nivåkurvorna i figuren till vänster.



Lätt märke till att alla nivåkurvor går runt en punkt, nämligen origo. Origo är nivåkurva till höjden $z = 25$ (som därför är ett exempel på när en nivåkurva inte är en kurva utan endast är en punkt). Som vi ser i den högra figuren beror det på att origo är ett entydigt (lokalt) maximum för funktionen.

Den formella definitionen av ett lokalt maximum är som i endim:

Definition 1

Funktionen f av två variabler har ett lokalt maximum i punkten (a, b) om det finns en omgivning till punkten sådan att

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

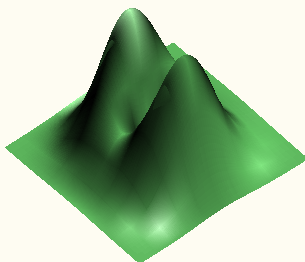
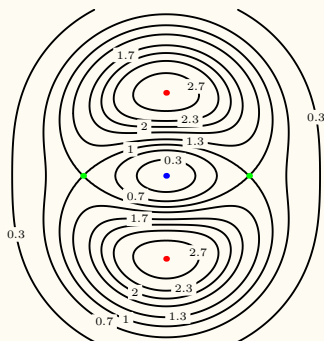
då (x, y) ligger i denna omgivning. På motsvarande sätt definieras ett lokalt minimum.

Lokala maxima och minima kallas med ett gemensamt namn för lokala extrempunkter. Vi säger också att funktionen har ett lokalt extremvärde i en sådan punkt.

En lokal extrempunkt kan *normalt* identifieras i en nivåkurvegraf till en funktion i det att den utgör centrum för enkla^[1], slutna, kurvor som ligger i varandra. Vi tar ett lite mer komplicerat exempel.

Exempel 1.2 Till vänster i figuren nedan är en datorritad nivåkurvegraf för funktionen

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}.$$



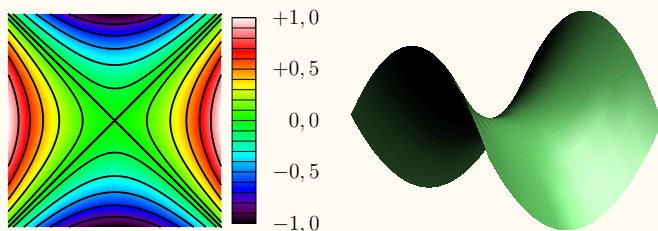
Vi ser tre punkter som förefaller vara centrum för just enkla slutna kurvor, nämligen punkterna $(0, -1)$, $(0, 1)$ och $(0, 0)$. Av de numeriska värdena på nivåerna att döma är $(0, 0)$ ett lokalt minimum och de andra två lokala maxima. Att så är fallet framgår tydligt för de senare och antyds för origo i den tredimensionella figuren till höger.

I nivåkurvegrafen i detta exempel ser vi också två ytterligare punkter som ser lite speciella ut, nämligen punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$. Vi ska nu se vad som är speciellt med dem.

Exempel 1.3 Betrakta funktionen

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

nära origo. Nivåkurvegraf och funktionsyta för denna är ritad nedan. Istället för höjdnöteringar använder vi en värmeskala, där färgen talar om hur varmt det är i olika punkter, och temperatur svarar mot höjd i tidigare figurer. Eftersom boken är tryckt i svartvitt har dessa färger dock blivit gråskalor. Vi behåller dock nivåkurvorna, eftersom de ger lite mer detaljerad information än enbart färgerna.



Betrakta nu funktionsytan längs de två koordinataxlarna i kartan. På x -axeln har vi $f(x, 0) = x^2$, som har ett lokalt minimum i origo, medan vi på y -axeln har $f(0, y) = -y^2$, som har ett lokalt maximum i origo. Om vi istället går längs kurvorna $y = \pm x$ befinner vi oss på höjden noll hela tiden.

Vi ser att ytan har vissa likheter med en ridsadel: man sitter i riktning av x -axeln, med benen hängande ut i den vinkelräta riktningen.

Ytan kallas därför en sadelyta och är viktig i den kommande diskussionen.

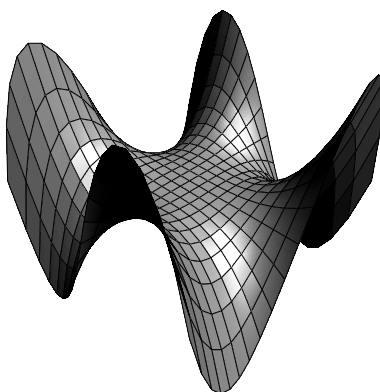
Punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ i exempel 1.2 är punkter i vars omedelbara omgivning ytan ser ungefär ut som en sadelyta. Sådana punkter kallas *sadelpunkter*. I en sådan punkt skär en nivåkurva sig själv en gång, så att den närmaste omgivningen delas in i fyra sektorer, där ytan i två av dem går uppåt och i två av dem går nedåt.

Det finns andra sorters sadelytor än den som vi just diskuterat. Ytan på sidan 2 är av den typen. Den kallas en apsadel, därför att det inte bara finns plats för benen på sidorna, men också för en svans baktill.

Till höger har vi ytterligare en sorts sadelyta, en hundsadel, i vilken det finns plats för fyra "hängande" ben. Den ges av ekvationen

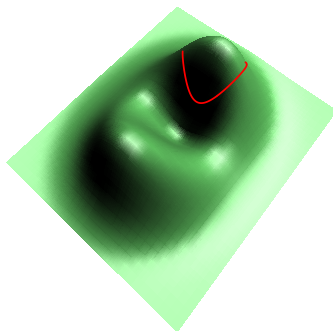
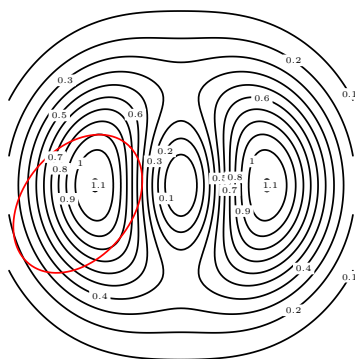
$$z = 4x^3y - 4xy^3.$$

Det finns ytterligare, liknande, sadelpunkter som man får genom att i högerledet ta polynom av x och y som är homogena, d.v.s. har samma gradtal i alla termer^[2].



Kurvor och tangentplan

Betrakt nu landskapet från exempel 1.2 igen och antag att man har lagt ut en joggingbana i terrängen. På kartan ser den ut som den ellipsformade kurvan i den vänstra delen av figuren nedan.



I verkligheten är den en kurva i rummet, som hela tiden ligger på ytan ifråga. Rymdkurvan, alltså själva joggingbanan, antyds i den högra figuren.

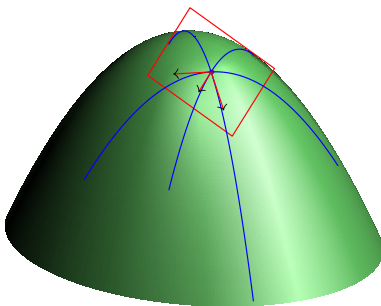
Hur ser man från nivåkurvegrafen var joggingbanan ligger som högst? En stunds eftertanke visar att det måste vara i en punkt där

joggingkurvan tangerar en nivåkurva; om den nämligen skär den transversellt kan man alltid komma lite högre. Genom att följa banan på kartan, och jämföra med nivåkurvorna, får man en ganska bra bild av topografin för joggingkurvan.

Genom en (inre) punkt på en funktionsyta går uppenbarligen många olika kurvor. Varje C^1 kurva genom punkten har en tangent där. Denna i sin tur definierar en rät linje i rummet som är tangent till ytan i punkten.

Olika C^1 kurvor definierar i allmänhet olika tangentlinjer, och tillsammans utgör dessa linjer ett plan i rummet. Detta plan kallas *tangentplanet* till ytan i punkten.

Per definition går tangentplanet genom origo, men man brukar parallellförflytta det till punkten på ytan.



Det som lokala extrempunkter och sadelpunkter har gemensamt är att tangentplanet i en sådan punkt är horisontellt. När vi letar lokala extrempunkter ska vi därför leta efter punkter där tangentplanen är just horisontella, vilket vi, liksom i endimen, kan göra med hjälp av derivator. En sådan punkt kallas en stationär punkt, och i flerdim kan en yta nära en stationär punkt se ut på ett antal olika sätt, eftersom vi har många riktningar att röra oss i.

Rotationsytor som är funktionsgrafer

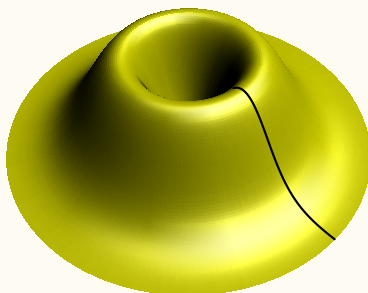
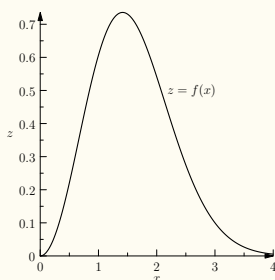
Vi ska här diskutera en speciellt sorts ytor, vilka uppkommer genom att vi roterar grafen av en funktion av en variabel ett varv runt en axel. Den yta som kurvan sveper över kallas en rotationsyta.

Mer precist, betrakta först grafen $z = f(x)$ av en funktion av en variabel, definierad för $x \geq 0$. Notera att vi ritar den i xz -planet. Om vi roterar grafen runt z -axeln kommer vi att generera en funktionsyta vars nivåkurvor är cirklar $x^2 + y^2 = r^2$. Motsvarande höjd är då $f(r)$, så vi kan också skriva ytan på formen

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Nästa exempel exemplifierar detta.

Exempel 1.4 I figuren nedan har vi till vänster ritat grafen till funktionen $f(x) = x^2 e^{-x^2/2}$ för $0 \leq x \leq 4$. När vi roterar den runt den vertikala axeln uppkommer rotationsytan som är ritad till höger, med den ursprungliga grafen $z = f(x)$ inritad.



Ekvationen för ytan ges enligt diskussionen ovan av

$$z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad x^2 + y^2 \leq 16.$$

Det betyder att om vi ska skissera ytan så ska vi använda att högerledet är en funktion av $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, nämligen $f(r) = r^2 e^{-r^2/2}$. Då vet vi att ytan har uppkommit genom att vi roterat en lämplig del av dess graf runt den vertikala axeln. I det här fallet $0 \leq r \leq 4$.

Vi avslutar med ett exempel på resonemanget i den andra delen av exemplet ovan.

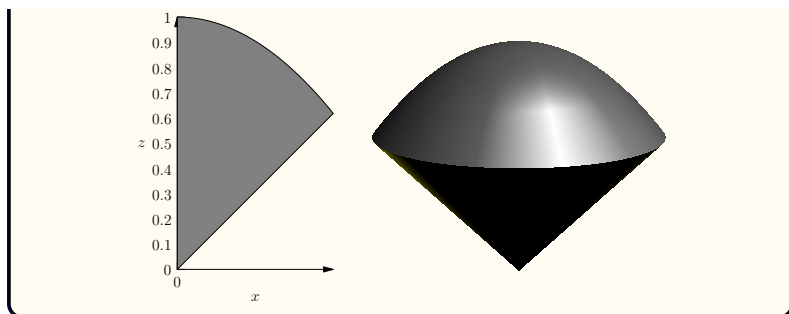
Exempel 1.5 Vi ska beskriva området som definieras av

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - x^2 - y^2.$$

Enligt diskussionen ovan får vi det området genom att vi roterar området

$$r \leq z \leq 1 - r^2, \quad r \geq 0$$

i rz -planet runt z -axeln, vilket illustreras i figuren nedan. Vi ser en figur som påminner lite om en glasstrut med glass i.



Några andra rotationsytor

Alla rotationsytor kan inte beskrivas som funktionsytor. Vi kan ta många olika kurvor i högra halvan av xz -planet och rotera dem runt z -axeln för att få ytor som har z -axeln som rotationsaxel. Ett välkänt exempel är en sfär som man får genom att rotera en halvcirkel.

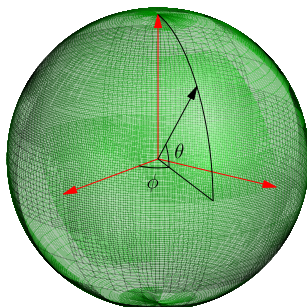
Enhetssfären består av alla punkter i rummet som ligger på avståndet ett ifrån origo. Enligt Pytagoras sats innebär det att vi kan beskriva den som alla (x, y, z) som uppfyller ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Det är ytans beskrivning på ekvationsform.

Men det är inte enda sättet att beskriva den på. Vi kan också parametrisera den.

En parametrisering av enhetscirkeln är den som vi använder för att ange punkter på jordklotet. För att beskriva den, låt oss först lägga z -axeln som rotationsaxel. Den skär då sfären i två punkter, nordpolen och sydpolen. En meridian är en cirkel på sfären som går igenom båda polerna, medan ekvatorn är den cirkel som ligger i det plan som ligger mitt emellan polerna och vinkelrätt mot rotationsaxeln; vi kallar det ekvatorialplanet. Om vi räknar höjd längs rotationsaxeln, så har vi också nivåkurvor som skär meridianerna vinkelrätt, latituderna.



För att ange en punkt P på sfären ska vi därför ange vilken meridian

och vilken nivåkurva den ligger på. För att beskriva dessa kurvor kan man använda vinklar. T.ex. kan nivåkurvan, latituden, beskrivas med hjälp av vinkeln θ mellan vektor $\overrightarrow{OP}$ och ekvatorialplanet. Vad gäller meridianen måste vi dock gå ett steg längre: en meridian skär en nivåkurva i två punkter, så vi inför longituderna, som är halvcirklar från nord- till sydpolen. Då blir varje punkt (utom polerna) entydigt bestämd av vilken longitud och latitud som de ligger på. För att bestämma en vinkel som beskriver longituderna måste vi först definiera var den är noll (vilket är Greenwich-meridianen på jordklotet) och hur den ska roteras (vilket vi tar som moturs, sett från nordpolen). Vinkeln ϕ definieras så att den är noll i riktning av positiva x -axeln.

Om vi använder dessa vinklar för att ange en punkt (x, y, z) på sfären, så ser vi att $z = \sin \theta$. Projektionen av punkten på ekvatorialplanet ger oss en punkt som ligger på avståndet $\cos \theta$ från sfärens medelpunkt, och dess exakta läge bestäms av vinkeln ϕ genom $(x, y) = \cos \theta (\cos \phi, \sin \phi)$. Det betyder att vi kan beskriva alla punkter på sfären genom funktionen

$$\psi(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta),$$

där $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Nästan alla punkter beskrivs då av precis ett par (θ, ϕ) , ett undantag är Greenwich-meridianen där vi kan ta både $\phi = 0$ och $\phi = 2\pi$. Och vad gäller nord- och sydpolen kan vi ta vilket ϕ vi vill — de punkterna bestäms entydigt av att $\theta = \pi/2$ respektive $\theta = -\pi/2$.

Vi har alltså två ytterligare metoder att definiera ytor i rummet, förutom funktionsytor. Dels på ekvationsform, d.v.s. som de trippletter (x, y, z) som löser en funktion $f(x, y, z) = 0$, dels på parameterform, vilket betyder att vi definierar en funktion $\psi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ där K är en delmängd av $\mathbb{R}^2$. Vi ska inte här närmare diskutera villkor på funktionerna f respektive ψ för att detta ska bli vettiga ytor (det kommer senare), utan nöjer oss med att ta ett ytterligare exempel.

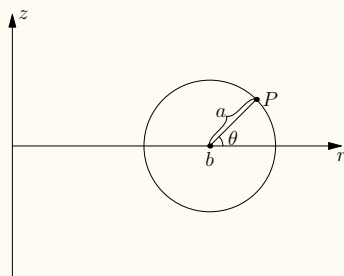
Exempel 1.6 Betrakta cirkeln med radien a vars medelpunkt ligger på r -axeln på avståndet b från origo, där vi antar att $b > a$. Om vi roterar den cirkeln runt z -axeln, vilken figur får vi då? (Gissningsvis inser du att det blir något som liknar en badring.) Vi ska härleda både en ekvation och en parametrisering för den ytan.

Ekvationen för cirkeln i rz -planet ges av $(r - b)^2 + z^2 = a^2$. När vi har roterat så betyder det att en punkt (x, y, z) ligger på ytan om och endast om

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Detta blir därför ett sätt att beskriva ytan på ekvationsform.

För att ange en parametrisering inför vi två vinklar. Den ena, θ , anges i figuren nedan:



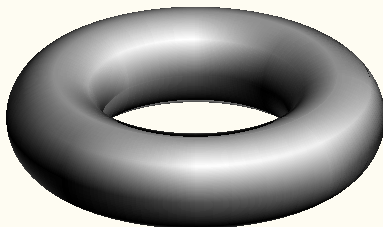
Den andra, ϕ , är samma vinkel som vi använde i xy -planet för enhetssfären. Med dessa val har vi att $z = a \sin \theta$ och $r = b + a \cos \theta$. Det följer att

$$(x, y) = (b + a \cos \theta)(\cos \phi, \sin \phi),$$

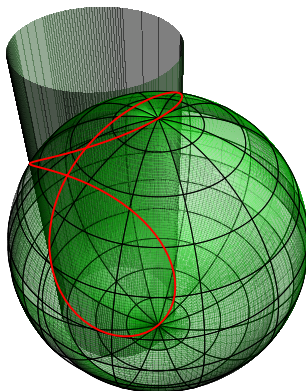
och därmed att en parametrisering av ytan ges av funktionen

$$\psi(\theta, \phi) = ((b + a \cos \theta) \cos \phi, (b + a \cos \theta) \sin \phi, a \sin \theta),$$

men den här gången ska vi låta båda vinklarna gå hela varvet: $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$. Den så uppkomna ytan kallas en torus.



Vad gäller då för kurvor i rummet? Hur kan vi beskriva dem? Ett sätt är naturligtvis att parametrisera dem, d.v.s. ange en funktion $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ vars värdemängd utgörs av kurvan. Men kurvor kan också uppkomma som skärning mellan två ytor, såsom illustreras i figuren nedan.



Den beskriver skärningen mellan en cylinder och en sfär. Mer precist, skärningen mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och cylindern som definieras av ekvationen ^[3] $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Den röda kurvan definieras därför av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Denna kurva, som kallas Viviani's kurva, kan också beskrivas av parametriseringen

$$c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2}), \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi,$$

vilket lämnas åt läsaren att visa.

Rymdpolära koordinater

När vi ändå har diskuterat parametriseringen av enhetssfären ovan är det naturligt att också kommentera de s.k. rymdpolära koordinaterna. Dessa är motsvarigheten till de polära koordinat i planet som vi redan använt oss av flera gånger:

$$(x, y) = r(\cos \phi, \sin \phi), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Som bekant har vi inte entydighet här. T.ex. kan vi välja vilket ϕ vi vill till $r = 0$ för att få origo $(0,0)$ och $\phi = 0$ och $\phi = 2\pi$ ger samma resultat. Det viktiga är att punkten beskrivs som r gånger en riktningsvektor, och att vi genomlöper alla riktningar ut från origo.

Anmärkning Det kan vara värt att påminna om att om vi identifierar planet med det komplexa talplanet så identifierar vi (x, y) med $z = x + iy$ och de polära koordinaterna skrivs

$$z = re^{i\phi} \quad \text{där} \quad e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Rymdpolära koordinater har samma grundform som de plana polära koordinaterna:

$$(x, y, z) = re,$$

där e beskriver riktningarna ut från origo, vilket är detsamma som att beskriva punkterna på enhetscirkeln. Inom matematiken brukar man emellertid ändra valet av vinklar lite och inte använda latitud och longitud. Mer precist använder man longitud, men istället för latitud använder man vinkeln mot positiva z -axeln. Om vi låter den vinkeln vara θ , så blir alltså $\theta' = \pi/2 - \theta$ den vinkel som mäter latituden. För θ gäller då att $\theta = 0$ svarar mot nordpolen på enhetscirkeln, medan $\theta = \pi$ svarar mot sydpolen.

Med dessa val av vinklar som parametrisering av enhetssfären ges de rymdpolära koordinaterna av

$$(x, y, z) = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

där $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Även nu gäller att för origo kan vi ta vilka vinklar vi vill och att vissa punkter kan anges med flera val på vinklar. Trots det är dessa koordinater mycket användbara i praktiken. Det yttersta skälet till det är att mycket i världen är åtminstone approximativt rotationssymmetriskt.

