

Innehåll: Differentierbarhet och tangentplan

Kapitel 4.1-4.3, 4.5, 4.8 (s 138-140)

- 1) Differentierbarhet
- 2) Beräkning av partiella derivator genom differential
- 3) Tangentplan
- 4) Feluppskattningar

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- beräkna differentialen av en funktion och plocka ut de partiella derivatorna ur den
- de viktiga konsekvenserna av att en funktion är differentierbarhet
- identifiera om en funktion är differentierbar från dess partiella derivator (sats)
- räkna med kedjeregeln och bestämma tangentplan.
- förstå hur differentialen dyker upp när man gör feluppskattningar vid analys av data från experiment.

Differentierbarhet (4.2, 4.5)

Definitionen av differentierbarhet är densamma som i endim:

Definition En funktion f är differentierbar i punkten a om det finns en funktion $k(a, h)$ som är kontinuerlig i $h = 0$ och sådan att

$$f(a + h) - f(a) = k(a, h)h.$$

Skillnaden mot endim är att här är h en vektor och funktionen $k(a, h)$ en vektorvärd funktion. Uttrycket $k(a, h)h$ är en matrismultiplikation mellan en matris och en kolonnvektor.

Om f är reellvärd blir $k(a, h)$ en radvektor i högerledet. Om inte, blir $k(a, h)$ en "hel matris". Differentialen av f i punkten h är uttrycket

$$df(a)[h] = k(a, 0)h,$$

vilket alltså är på formen Ah där A är en matris som beror på a men inte h (linjär algebra!).

Exempel Som exempel, tag $f(x, y) = xy$ och visa att den är differentierbar i $(1, 1)$. (Uppgift 4.38a med alternativ lösning.) Vi har att $f(1, 1) = 1$, så

$$f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) = (1 + h)(1 + k) - 1 = h + k + hk = (1, 1 + h) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Med beteckningarna har vi alltså $k((1, 1), (h, k)) = (1, 1 + h) \rightarrow (1, 1)$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Det visar att f är differentierbar i $(1, 1)$ med differential

$$df(1, 1)[h, k] = (1, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h + k.$$

Det första vi gör är att konstatera att om $f(x) = x_i$, så blir

$$f(a + h) - f(a) = h_i, \text{ och alltså } dx_i[h] = h_i. \text{ Om vi inför } dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

så kan vi därför (precis som i endim) skriva

$$df(a) = A dx.$$

Exempel När vi har reellvärda funktioner av två variabler, $f(x, y)$ så blir A en radvektor $A = (A_1, A_2)$ och dx kolonnvektorn $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ och vi får att differentialen blir ett uttryck på formen

$$df = A_1 dx + A_2 dy.$$

Problemet är nu att förstå detta. Men vi ska göra det i två steg: (1) lära oss beräkna differentialen och (2) förstå vad den betyder geometriskt. Låt oss bara kort konstatera att räkneregler för differentialen av en summa eller produkt av funktioner gäller som i endim. Kedjeregeln gäller också, men den är värd en egen massa! Däremot är det krångligare med invers funktion (varför?). Notera också att liksom i endim så blir en differentierbar funktion av nödvändighet kontinuerlig (varför?).

Egenarbete

Bokens variant av definitionen av differentierbarhet (se 4.2) är krångligare än den ovan, men ekvivalent med den. Jämför de två genom att se på lösningen till **4.38a**, som är samma exempel som gjorts ovan. Det viktiga är dock inte att kunna definitionen utan att kunna räkna med differentialer – vilket är nästa avsnitt.

Att beräkna differentialen och partiella derivator

... blir ofta en räkning vi redan kunde gjort i endim:

Exempel Betrakta funktionen $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ som är en funktion av två variabler. Följande räkning möter inget hinder:

$$\begin{aligned} df(x, y) &= d(x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)} + (x^2 + 3y^2)d(e^{-(x^2 + y^2)}) \\ &= (2xdx + 6ydy - (x^2 + 3y^2)(2xdx + 2ydy))e^{-(x^2 + y^2)}, \end{aligned}$$

vilket vi kan sammanfatta som

$$df = e^{-(x^2 + y^2)}(2x(1 - (x^2 + 3y^2))dx + 2y(3 - (x^2 + 3y^2))dy).$$

Om vi håller y fixt, alltså $dy = 0$, så ser vi att $df = A_1 dx$, vilket precis betyder att A_1 är den partiella derivatan av f m.a.p. x . Motsvarande för A_2 . Från exemplet ovan får vi därför att

Exempel För funktionen $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ gäller att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1 - (x^2 + 3y^2))e^{-(x^2 + y^2)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(3 - (x^2 + 3y^2))e^{-(x^2 + y^2)}.$$

En konsekvens av detta är att en differentierbar funktion är deriverbar (har partiella derivator). Att omvändningen inte gäller har vi sett (när?). Men däremot har vi

Sats Om funktionen f :s partiella derivator är kontinuerliga i en omgivning av punkten a , så gäller att f är differentierbar i a .

Bevis. Bevisiden kommer tydligast fram i två dimensioner. Vi använder beteckningarna $x = (x_1, x_2)$ och motsvarande för a och h . Vi har då enligt medelvärdessatsen att

$$f(a + h) - f(a) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$(\partial_2 f(a_1 + \xi_1 h_1, a_2 + h_2), \partial_2 f(a_1, a_2 + \xi_2 h_2))h.$$

Här är "koefficienten" (radvektorn) framför h en kontinuerlig funktion av h i origo enligt förutsättningarna. Därmed är f differentierbar. $\square$

Egenarbete

Beräkna differentialerna i **4.39** och identifiera också de partiella derivatorna från resultaten.

Kedjeregeln (4.3)

Kedjeregeln är självklar när man räknar med differentier: om vi har att $h(t) = f(g(t))$, så ger differentialräkning att först är

$$df(x) = \partial_1 f(x) dx_1 + \partial_2 f(x) dx_2,$$

och stoppar vi i detta in $x_1 = g_1(t)$, $x_2 = g_2(t)$, så får vi att

$$dh(t) = \partial_1 f(g(t)) dg_1(t) + \partial_2 f(g(t)) dg_2(t),$$

från vilket vi får att

$$h'(t) = \partial_1 f(g(t)) g_1'(t) + \partial_2 f(g(t)) g_2'(t).$$

Exempel $f(u, v)$ är en differentierbar funktion och vi sätter $u = x$ och $v = y/x$. Uttryck de partiella derivatorna av den sammansatta funktionen (m.a.p. x, y) i de m.a.p. u, v . Differentialräkning ger

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial u} dx + \frac{\partial f}{\partial v} d\frac{y}{x} = \\ \frac{\partial f}{\partial u} dx + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{xdy - ydx}{x^2} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) dx + \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial v} dy. \end{aligned}$$

Från detta kan vi avläsa de partiella derivatorna.

Exempel Vi vill bestämma alla lösningar på formen $u(x, y) = f(xy)$ till differentialekvationen

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 1, \quad x > 0, y > 0.$$

För att uttrycka detta som en differentialekvation i f beräknar vi först

$$du(x, y) = df(xy) = f'(xy) d(xy) = f'(xy)(ydx + xdy),$$

ur vilket vi får att $\partial u / \partial x = y f'(xy)$, $\partial u / \partial y = x f'(xy)$. Det ger oss ekvationen

$$2xy f'(xy) + f(xy) = 1.$$

Sätter vi nu $t = xy$ är detta en vanlig differentialekvation $2t f'(t) + f(t) = 1$, vilken vi löser med endim-teknik till $f(t) = 1 + Ct^{-1/2}$. Det följer att

$$u(x, y) = 1 + \frac{C}{\sqrt{xy}}.$$

Egenarbete

Gör först 4.8, där det viktiga är att förstå vad kedjeregeln är. Gör sedan 4.14 och avsluta med 4.10.

Differential och tangentplan (4.1, s97-99)

Vi påbörjar nu en geometrisk förståelse av differentialen. Vi koncentrerar oss fr.a. på det två-dimensionella fallet (av en reellvärd funktion) där vi kan visualisera vad som händer. Dock har allt vi säger generaliseringar till funktioner av många fler variabler.

Vi vet från definitionen av differential att för små h, k gäller att

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \approx df(a, b)[h, k]$$

vilket vi kan skriva om som

$$f(x, y) - f(a, b) \approx df(a, b)[x-a, y-b] = A_1(x-a) + A_2(y-b),$$

där A_i :na är f :s partiella derivator i punkten (a, b) . Det betyder att nära (a, b) kan vi approximera ytan $z = f(x, y)$ med ytan $dz = df(a, b)[dx, dy] = A_1 dx + A_2 dy$, dvs

$$z = f(a, b) + A_1(x-a) + A_2(y-b).$$

Det senare är ett plan, och svarar mot tangenten i en punkt på grafen till en funktion av en variabel. Vi kallar det därför för *tangentplanet till f i punkten (a, b)* .

Exempel Bestäm tangentplanet till ytan $z = x^2 + xy$ i punkten $(1, 2, 3)$.

Med $f(x, y) = x^2 + xy$ ges tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten av $z - 3 = df(1, 2)[x - 1, y - 2]$. Differentialen blir

$$df(x, y) = (2x + y)dx + xdy \Rightarrow df(1, 2) = 4dx + dy \Rightarrow$$

$$df(1, 2)[x - 1, y - 2] = 4(x - 1) + (y - 2).$$

Tangentplantets ekvation blir alltså

$$z - 3 = 4(x - 1) + (y - 2) \iff 4x + y - z - 3 = 0.$$

Egenarbete

Gör 4.5 så att du har beräknat ett tangentplan själv. Räknar man med differential så är det inte mycket att komma ihåg! Gör också 4.6.

Feluppskattningar (4.5)

Ett område där differentialen är naturlig är i samband med feluppskattningar:

Exempel För funktionen $f(x, y) = \ln|x^2 + xy|$ kan vi m.h.a. en miniräknare (el. dyl.) beräkna

$$f(2.01, 1.03) - f(2, 1) = \ln(2.01^2 + 2.01 \cdot 1.03) - \ln 6 = 0.0102 \dots$$

Har vi ingen miniräknare till hands kan vi använda differentialräkning, eftersom

$$f(2.01, 1.03) - f(2, 1) \approx df(2, 1)[0.01, 0.03].$$

Vi beräknar därför differentialen:

$$df(x, y) = \frac{(2x + y)dx + xdy}{x^2 + xy} \Rightarrow df(1, 2) = \frac{1}{6}(5dx + 2dy) \Rightarrow$$

$$df(2, 1)[0.01, 0.03] = \frac{1}{6}(5 \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.03) = \frac{11}{6} \cdot 0.01 = 0.0103.$$

Vi ser alltså en väldigt god överensstämmelse (vilket är naturligt med tanke på hur små dx och dy vi valde).

Exempel Om vi beräknar talet e^π genom att använda närmevärdena $e = 2.718$ och $\pi = 3.142$ så får vi att $e^\pi \approx 23.142580$. Frågan är hur många av dessa decimaler som är korrekta om vi vet att felet i e är mindre än 0.0003 och felet i π är mindre än 0.00041. Nedanstående räkning ger inte ett 100% säkert exakt svar, men en god uppfattning av det.

Inför funktionen $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$. Då gäller att

$$df(x, y) = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy \Rightarrow$$

$$df(2.718, 3.142) = 26.752755 dx + 23.140181 dy.$$

Om vi här sätter in $dx = 0.0003$ och $dy = 0.00041$ så ser vi att $df(2.718, 3.142) = 0.0175$, så felet kan vara så stort som ungefär 0.02. Vi sammanfattar det som

$$e^\pi = 23.14 \pm 0.02.$$

Det korrekta värdet på e^π med fyra decimaler är 23.1407. Vi ser att feluppskattningen är lite pessimistisk, vilket i sin tur beror på att felet i närmevärdena för e och π bär åt olika håll: för e är det en underskattning, för π är det en överskattning.

Ofta ingår i ett problem data som innebär att räkning med differentier är naturligt.

Exempel Vi vill beräkna rörelseenergin hos en gevärskula precis då den lämnar mynningen. Ett försök mäter kulans fart till 540 m/s och kulan har massan 13.2 g. Felmarginalen i fartmätningen är 1% och vågen som använts har en felmarginal på 0.05 g. Hur stor osäkerhet ger dessa felmarginaler i resultatet?

För analysen - läs boken!

Egenarbete

Gör **4.40** och **4.41**. Fundera speciellt kring den andra av dessa.

Att fundera på till nästa gång

Exempel Den allmänna gaslagen säger att $PV = nRT$ där n, R är konstanter och du bör veta vad P, V, T är. Visa att

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T} = 0.$$