

Innehåll: Funktioner $R^n \rightarrow R^p$, Gränsvärden, kontinuitet och något om partiella derivator

Kapitel 1, 2, 3.1–3.4, 4.1 (s 93-97)

- 1) Grundläggande begrepp
- 2) Vektorvärda funktioner
- 3) Gränsvärden
- 4) Kontinuitet
- 5) Partiella derivator (inledning)

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- förstå vad vi menar med parametriseringar av kurvor och ytor
- kunna tolka vektorfält som funktioner
- definitionen av gränsvärden och veta hur man kan beräkna dem
- definitionen av kontinuitet och veta att bara för att de partiella derivatorna finns behöver inte en funktion vara kontinuerlig

Några nya begrepp (1.1-1.2)

- En omgivning av en punkt är innehållet i en cirkelskiva (intervall, klot, etc) med punkten som medelpunkt.
- En inre punkt i en mängd M är en punkt sådan att det finns omgivning till den som ligger helt i M
- En mängd är öppen om alla punkter i den är inre punkter.
- En mängd är sluten om dess komplement är öppet
- En punkt är en randpunkt till en mängd M om varje omgivning till den innehåller både punkter från M och från dess komplement.
- En mängd är kompakt om den är både sluten och begränsad.

Anmärkning En mängd är sluten om alla randpunkter tillhör mängden och öppen om ingen punkt på randen ligger i mängden

Exempel Vilka egenskaper har mängden $\{(x, y); 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}$? Mängden $\{(x, y); 4x^2 + 9y^2 > 1\}$? Är mängden $\{(x, y); 1 \leq y < 2\}$ öppen eller sluten? (Vad gäller för mängden av rationella tal?)

Vektorvärda funktioner (3.2)

Parametriseringar av kurvor

En funktion $f : I \rightarrow R^p$ där I är ett intervall och $p \geq 2$ kan uppfattas som en parametrisering av en kurva. Dess värdemängd är kurvan.

Exempel Ange två olika parametriseringar för enhetscirkeln. Ange också en parametrisering för den högra delen av hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$.

Egenarbete

Detta gjorde vi i endimen, men det kan vara anledning att repetera. Gör därför 3.12.

Parametriseringar av ytor

En funktion $f : \Omega \rightarrow R^3$ där $\Omega \subset R^2$ kan ibland uppfattas som en parametrisering av en yta. Ytan är värdemängden.

Exempel Ange en parametrisering av enhetssfären. (Tänk jorden!) Hur ändras parametriseringen om vi istället låter radien vara R ?

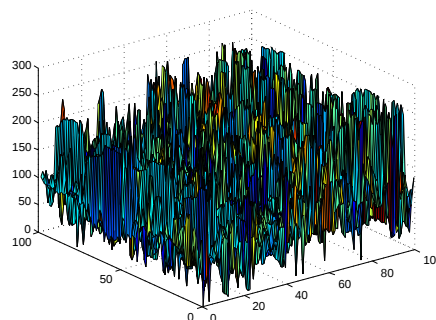
Ett annat exempel på en sådan funktion är bilden nedan:



Varje pixel (x, y) i bilden beskrivs av intensiteten (mellan 0 och 1) av de tre färgerna rött, grönt och blått i den. Vi har alltså en funktion

$$(x, y) \rightarrow (Rött(x, y), Grönt(x, y), Blått(x, y)) \in [0, 1]^3$$

Varje komponent i högerledet är en reellvärd funktion, men att rita grafen för den är inte så informativt, som grafen av den röda komponenten nedan visar:



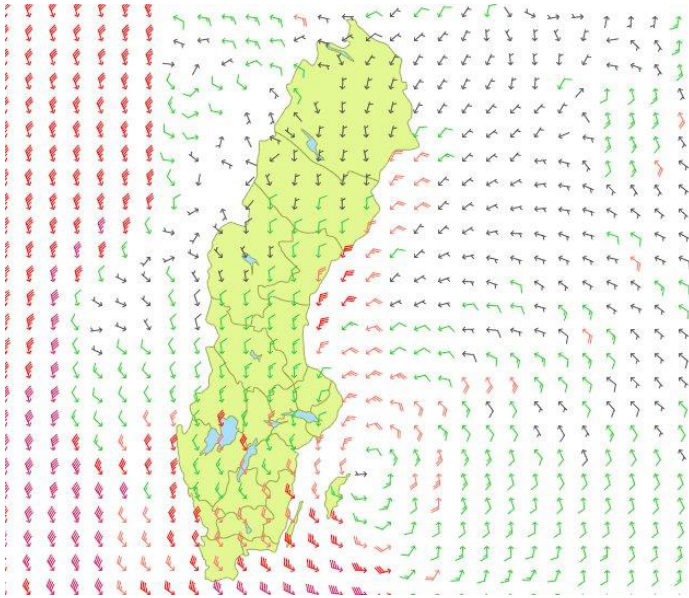
Men de funktioner vi ska försöka förstå ser inte ut såhär - de ska vara differentierbara!

Egenarbete

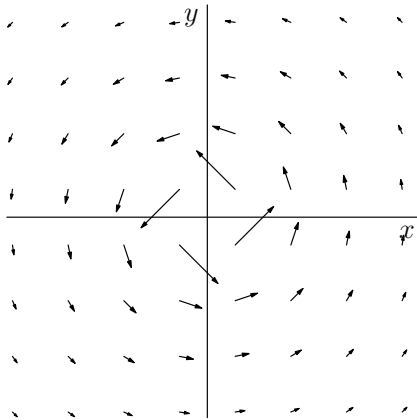
Gå noga igenom 3.13. Tänk efter precis hur ytan uppkommer.

Funktioner från $R^n \rightarrow R^n$

kan uppfattas både som koordinatbyten och som vektorfält (alltså en vektor i varje punkt). Det förra behövs ibland för att få ordning på sina formler, det senare är mycket viktigt i fysiken. Ett exempel på det senare är vindkartor typ den nedan för stormen Sven i början av december 2013:



Ett annat exempel är det magnetiska fältet som har att göra med varför generatorer alstrar ström och elmotorer fungerar:



Försök att gissa funktionens analytiska utseende. (Ledning: kraftens storlek är omvänt proportionell mot avståndet till origo.)

Gränsvärden och kontinuitet (3.4)

Gränsvärden

Definitionen av gränsvärde är densamma som i endim om vi tolkar absolutbelopp som avstånd:

Definition $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow a$ om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x) - A| < \epsilon \text{ om } (x \in D_f \text{ och } |x - a| < \delta).$$

Att bevisa påståenden om gränsvärden blir därför en fråga om uppskattningar! Ofta blir räkningarna lättare genom att byta till polära koordinater:

Exempel Vi ska beräkna $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy^2 / (x^2 + y^2)$. I polära koordinater:

$$\frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)^2}{r^2} = r \cos \theta \sin^2 \theta.$$

När vi låter $r \rightarrow 0$ så går detta mot 0. Vi gör därför räkningen

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = r |\cos \theta \sin^2 \theta| \leq r \rightarrow 0 \text{ då } r \rightarrow 0.$$

Det är mycket som krävs för att ett gränsvärde ska finnas:

Exempel För att beräkna gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy / (x^2 + y^2)$ inför vi också polära koordinater:

$$\frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{r^2} = \cos \theta \sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

Detta oavsett vad r är! Olika vägar in mot origo ger alltså olika värden, varför gränsvärdet inte finns.

Men det blir ännu värre:

Exempel För $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y / (x^2 + y^2)$ ser vi att om vi närmar oss origo längs en linje $y = kx$ så blir gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{(x^2 + kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{(x + k)^2} = 0,$$

men närmar vi oss längs parabeln $y = kx^2$ blir gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{(x^2 + kx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{(1 + k)^2} \neq 0.$$

Vi måste alltså hantera alla möjliga vägar in mot punkten, vilket är skälet till att polära koordinater ofta är bra; det blir då en gränsövergång $r \rightarrow 0$.

Anmärkning Vi exemplifierar endast med reellvärda funktioner, men definitionen av gränsvärde och kontinuitet går lika bra för vektorvärda funktioner (arbetskomponentvis).

Egenarbete

Gör 3.17abcd. Deluppgift a har en lösning – studera den noga innan du gör de andra tre. Gör också 3.20 – även här studerar du lösningen till a noga innan du gör resten. Gränsvärden i oändligheten blir viktiga längre fram!

Kontinuerliga funktioner

Definitionen av kontinuitet är "densamma" som i endim:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Enda skillnaden är att $x = (x_1, \dots, x_n)$ etc. Funktioner uppkomna ur elementära funktioner blir automatiskt kontinuerliga (därför sammansättningen av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig).

Viktiga satser att känna till (motsvarigheter till endim-satser):

Sats Om f är kontinuerlig och reellvärd i den kompakta mängden D så gäller att den antar både sitt största och minsta värde i D .

Problemet vi måste lösa är hur vi hittar dessa värden.

Nästa sats svarar mot satsen om mellanliggande värden (bågsvis sammanhängande betyder vad det låter som).

Sats Låt f vara kontinuerlig och reellvärd på ett bågsvis sammanhängande område D . Om $a, b \in D$, $a \neq b$, så antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Denna sats följer direkt ur motsvarande sats i endim (rör dig längs en kurva från a till b).

Egenarbete

Gör 3.22abc. Tänk speciellt efter på c!

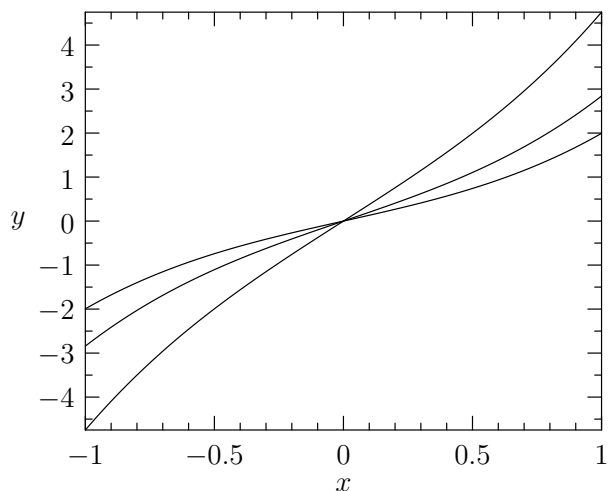
Partiella derivator och kontinuitet

En partiell derivata erhålls genom att man låter endast en variabel variera. De övriga är konstanter och man har då en derivata enligt endim:

Exempel För funktionen

$$f(x, y) = x^3y + xy^2 + \sin(xy)$$

(för vilken de tre graferna $y = f(x, 0.75)$, $y = f(x, 1)$ och $y = f(x, 1.5)$ är ritade nedan – du får inte bli förvirrade av att y används på två olika sätt här)



gäller att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^2 + y \cos(xy) \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy + x \cos(xy).$$

Här gäller t.ex. att $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 1)$ är "den vanliga derivatan" av funktionen $x \rightarrow f(x, 1)$, alltså riktningskoefficienten för tangenten till grafen $y = f(x, 1)$ i punkten $(a, f(a, 1))$.

Anmärkning Det finns många olika sätt att skriva (t.ex.) den partiella derivatan av f med avseende på x . Några vanliga exempel är

$$\frac{\partial f}{\partial x}, f'_x, f'_1, \partial_1 f.$$

I endim gäller att deriverbar medför kontinuerlig, men i flerdim gäller inte att bara för att de partiella derivatorna finns så är funktionen kontinuerlig. Ett enkelt motexempel ges av

Exempel Definiera

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = 0 \text{ eller } y = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

Då gäller att både $\partial f / \partial x$ och $\partial f / \partial y$ existerar och är noll i origo, men funktionen är inte kontinuerlig där!

Varför gäller det då i endim, men inte i flerdim, att en deriverbar funktion blir kontinuerlig? Därför att det korrekta villkoret är differentierbarhet!

Detta bara råkar vara samma sak som deriverbarhet i endim.

Egenarbete

Att beräkna partiella derivator är precis lika svårt som vanlig derivation. Öva genom att göra 4.1.