

## Innehåll: Några tillämpningar

Kapitel 10.5

## Efter dagens föreläsning måste du

- Fått en god uppfattning av diverse problem som man kan använda teorin på

## Beräkning av matrispotenser

Om en matris är diagonaliserbar, så är det lätt att beräkna potenser av den. För att se detta, antag att  $T^{-1}AT = D$  där  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Då gäller att  $A = TDT^{-1}$  och därför att

$$A^2 = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) = TD(T^{-1}T)DT^{-1} = TD^2T^{-1}$$

och en snabb kontroll visar att  $D^2 = \text{diag}(d_1^2, \dots, d_n^2)$ . Fortsätter vi på samma sätt ser vi att

$$A^k = TD^kT^{-1},$$

från vilket vi lätt räknar ut  $A^k$ .

**Exempel** Vi vill beräkna  $A^k$  för ett godtyckligt heltal  $k$  om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna är symmetrisk och därmed diagonaliserbar. Så vi ska diagonalisera den. För detta bestämmer vi först det karakteristiska polynomet

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = (\lambda - r_+)(\lambda - r_-)$$

där

$$r_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Vi har alltså två olika egenvärden, vilket betyder att matrisen är diagonaliserbar. För att bestämma  $S$  måste vi räkna ut egenvektorena. För  $\lambda = r_{\pm}$  ska vi då lösa systemet

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}.$$

Men om  $\lambda$  är ett egenvärde finns här endast en ekvation, säg  $x_1 = \lambda x_2$ , vilket betyder att egenvektorena är  $v_{\pm} = t(r_{\pm}, 1)$ . Det betyder att

$$T = \begin{pmatrix} r_+ & r_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T^{-1} = \frac{1}{r_+ - r_-} \begin{pmatrix} 1 & -r_- \\ -1 & r_+ \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu räkna ut potenserna:

$$A^k = TD^kT^{-1} = \begin{pmatrix} r_+ & r_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+^k & 0 \\ 0 & r_-^k \end{pmatrix} \frac{1}{r_+ - r_-} \begin{pmatrix} 1 & -r_- \\ -1 & r_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{r_+ - r_-} \begin{pmatrix} r_+^{k+1} - r_-^{k+1} & -r_+r_- (r_+^k - r_-^k) \\ r_+^k - r_-^k & -r_+r_- (r_+^{k-1} - r_-^{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Men  $r_+ - r_- = \sqrt{5}$  och  $-r_+r_- = 1$ , så vi ser att

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} r_+^{k+1} - r_-^{k+1} & r_+^k - r_-^k \\ r_+^k - r_-^k & r_+^{k-1} - r_-^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & a_k \\ a_k & a_{k-1} \end{pmatrix},$$

där

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Alla dessa tal måste vara heltal – varför? De första talen är (starta med  $k = 0$ )

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

en talföljd som kallas Fibonacciserien (efter Leonardo di Pisa, som på 1200-talet bl.a. införde de arabiska decimalsystemet till Europa).

## Några populationsmodeller

**Exempel** Antag att i en kaninfarm varje kaninhona föder en unge av honkön varje månad utom den första levnadsmånaden. Låt  $F_k$  beteckna antalet kaninhonor efter  $k$  månader. Vid farmens etablering införskaffades en nyfödd kaninhona och en hane. Bestäm  $F_k$  under förutsättning att inga kaniner dör.

Eftersom antalet honor efter  $k$  månader är lika med antalet månaderna innan plus de nyfödda (som bestäms av antalet två månader tidigare), så ser vi att  $F_k$  ska uppfylla rekursionsekvationen

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Vi kan lösa denna med matrisräkning genom följande trick: skriv  $v_k = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$ . Då har vi att

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k + F_{k-1} \\ F_k \end{pmatrix} = Av_k,$$

där  $A$  är matrisen i föregående exempel. Men det betyder att

$$v_k = Av_{k-1} = A^2v_{k-2} = \dots = A^{k-1}v_1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Men i föregående uppgift beräknade vi  $A^k$ , och med beteckningar därifrån får vi att

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Vi ser alltså att lösningen  $F_k = a_k$  ges av Fibonacciserien.

Samma idé som i detta exemplet kan användas till att beskriva s.k. populationsmodeller. Det handlar här om att man delar in populationen i olika åldersklasser och beskriver hur djuren i varje åldersklass (1) dör och (2) producerar avkomlingar. Sedan kan man analysera dessa förutsättningar till att avgöra vad som kommer att hända med populationen med tiden. Vi illustrerar med två exempel, ett artificiellt så att vi kan räkna igenom det, och ett som illustrerar att i verkligheten räknar man helst inte med papper och penna.

**Exempel** Betrakta en djurpopulation och dela in den i tre åldersklasser:

1. nyfödd (0-1-åringar)
2. ungdomar (1-2-åringar)
3. vuxna (2-3-åringar)

Inget djur antas leva mer än 3 år. Hälften av de nyfödda blir ungar och av dessa når 2/3 vuxenlivet. De nyfödda får 0.5 ungar per år (ett kanske inte helt realistiskt exempel), ungdomarna får 5 ungar per år och de vuxna 3 (alltså per djur). Vi sammanfattar i följande tabell:

| åldersklass: | 0-1           | 1-2           | 2-3 |
|--------------|---------------|---------------|-----|
| fertilitet:  | 0.5           | 5             | 3   |
| överlevnad:  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 0   |

Låt nu  $u_k = (x_k, y_k, z_k)$  vara en vektor vars komponenter består av antalet nyfödda ( $x_k$ ), antal ungdomar ( $y_k$ ) och antalet vuxna ( $z_k$ ) efter  $k$  (räknat från någon fix tidpunkt som vi återkommer till). Villkoren ovan ger då att

$$x_{k+1} = 0.5x_k + 5y_k + 3z_k, \quad y_{k+1} = 0.5x_k, \quad z_{k+1} = \frac{2}{3}y_k.$$

På matrisform blir detta att  $u_{k+1} = Au_k$  där

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

En sådan matris kallas en *reproduktionsmatris* och beskriver alltså dynamiken i populationen: vad som händer vad gäller reproduktion från år till år.

Det karakteristiska polynomet här är

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{5\lambda}{2} - 1 = (\lambda - 2)(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + 1).$$

Låt oss först se om vi kan dra några intressanta slutsatser utan att verkligen beräkna motsvarande egenvektorer. Numrera egenvärdena efter fallande storleksordning och låt  $v_i$  vara egenvektorn till  $\lambda_i$ .

Antag nu att vi har en startpopulation uppdelad i åldersklasser som beskrivs av  $u_0$ . Eftersom egenvektorerna är linjärt oberoende kan vi skriva  $u_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ . Ett år senare får vi då populationen

$$Au_0 = c_1Av_1 + c_2Av_2 + c_3Av_3 = c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + c_3\lambda_3v_3,$$

och fortsätter vi detta resonemang får vi att

$$A^k u_0 = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + c_3\lambda_3^k v_3 = \lambda_1^k (c_1v_1 + c_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k + c_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^k).$$

Men här gäller att  $(\lambda_i/\lambda_1)^k \rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$  för  $i = 2, 3$ , så vi ser att när  $k$  är stor gäller

$$u_k = A^k u_0 \approx \lambda_1^k c_1 v_1 = 2^k c_1 v_1.$$

Här ser vi två saker: (1) populationen växer som  $2^k$  och (2) åldersfördelningen efter lång tid ges av förhållandet mellan komponenterna i egenvektorn  $v_1$ , som är  $(12, 3, 1)$  (vilket lämnas som övning).

Vad exemplet visar är att om vi känner fertilitet och morbiditet inom varje åldersklass för en population, så kan vi också avgöra hur den kommer att tillväxa (eller kanske dö ut) och vilken ålderfördelning vi får efter lång tid. Det vi behöver ta reda på är det största egenvärdet och motsvarande egenvektor till reproduktionsmatrisen.

**Exempel** För en gräsälspopulation gäller följande data

| Ålder:      | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 5+   |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| fertilitet: | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.08  | 0.28  | 0.42 |
| överlevnad: | 0.657 | 0.930 | 0.930 | 0.930 | 0.935 | 0.935 | 0    |

Motsvarande reproduktionsmatris har som största egenvärde  $\lambda = 0.8586$  och motsvarande asymptotiska åldersfördelning (så att summan av elementen är ett) blir

$$(0.1498, 0.1146, 0.1241, 0.1345, 0.1457, 0.1586, 0.1727).$$

Vi ser t.ex. att 15% av populationen är nyfödd år från år, men också att populationen kommer att dö ut, eftersom största egenvärdet är  $< 1$ .

## Ett ekonomi-exempel

Tre hantverkare ska hjälpa till att renovera varandras hus. Alla tre arbetar sammanlagt 10 dagar enligt följande schema:

**Snickare:** 3 dagar i sitt hus, 4 hos elektrikern och 3 hos rörmokaren

**Elektriker:** 5 dagar i sitt hus, 2 hos snickaren och 3 hos rörmokaren  
**Rörmokare:** 2 dagar i sitt hus, 4 hos elektrikern och 4 hos snickaren.

Vi kan beskriva detta i följande matris, där kolonnerna representerar hantverkar och raderna vistelse i deras hus:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Här har vi dividerat med 10 för att få elementen att beskriva hur stor del av en dag de tillbringar hos varandra.

Vid prissättning bestämmer hantverkarna att ta en dagslön som gör att var och en tjänar exakt lika mycket på sitt arbete som den måste betala för utfört arbete (notera att alla måste betala till sig själva också). Följande ekvationssystem beskriver då att utgifter är lika med inkomster:

$$\begin{cases} p_S = 0.3p_S + 0.2p_E + 0.4p_R \\ p_E = 0.4p_S + 0.5p_E + 0.4p_R \\ p_R = 0.3p_S + 0.3p_E + 0.2p_R \end{cases}.$$

Det innebär att vektorn  $x = (p_S, p_E, p_R)$  ska vara en egenvektor till matrisen  $A$  med egenvärdet 1.

Så har då  $A$  egenvärdet ett?

$$\begin{vmatrix} \lambda - 0.3 & -0.2 & -0.4 \\ -0.4 & \lambda - 0.5 & -0.4 \\ -0.3 & -0.3 & \lambda - 0.2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.4 & \lambda - 0.5 & -0.3 \\ -0.3 & -0.4 & \lambda - 0.2 \end{vmatrix}.$$

I sista likheten har vi lagt ihop alla kolonner och lagt dem i första. Eftersom alla radsummor är ett följer att vi kan bryta ut  $\lambda - 1$  ur determinanten, så 1 är ett egenvärde.

För att hitta motsvarande egenvektor ska vi lösa ekvationssystemet ovan, vilket vi nu skriver på formen (vi multiplicerar med  $-10$ )

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 28t \\ x_2 = 44t \\ x_3 = 27t \end{cases}.$$

(Att vi inte får en entydig lösning beror till dels på att vi inte valt valuta!) Denna lösning talar om hur dagslönen ska förhålla sig för de olika hantverkarna för att ekonomin ska gå ihop!

*Anmärkning* Detta är ett enkelt exempel på hur nobelpristagaren Wassily Leontief beskrev en ekonomi. Han delar upp den i sektorer (hantverkarna) som handlar med varandra och det vi sett är då att det finns en egenvektor till egenvärdet 1 som definierar vilka priser olika sektorer kan ta ut, för att systemet ska vara i jämvikt.

En viktig observation i vissa praktiska tillämpningar som vi gör från ovan är att

En matris vars kolonnsummor alla är ett har (minst) en egenvektor med egenvärdet ett

Denna observation återkommer i nästa exempel.

## En Markovkedja

En biluthyrningsfirma har tre uthyrningsställen som vi kallar  $A, B, C$ . En kund får hyra sin bil på valfritt uthyrningsställe och återlämna bilen på valfritt uthyrningsställe. Efter att ha varit igång i ett år finner man att återlämnande sker på de olika ställena med en sannolikhet som beskrivs i matrisen nedan:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Här betyder t.ex. elementet 0.6 på plats  $(2, 3)$  att en bil som hyrs på ställe  $C$  med 60% chans återlämnas på ställe  $B$ .

Frågan man nu ställer sig är, hur kommer bilarna att fördela sig mellan de olika uthygningsställena efter en lång tid?

Antag att en bil hyrs på ställe  $B$ . Den bilens förväntade historia kan vi då beskriva på följande sätt. Inför vektorn  $p_n = (x_n, y_n, z_n)$  som består av sannolikheten  $x_n$  att en bil finns på ställe  $A$  efter att den lånats ut  $n$  gånger, sannolikheten  $y_n$  att den är på ställe  $B$  och  $z_n$  på ställe  $C$ . När vi börjar har vi att  $p_0 = (0, 1, 0)$ . Sannolikheten att den återlämnas på de olika ställena beskrivs då av  $p_1 = Ap_0 = (0.3, 0.2, 0.5)$ . Om vi sedan räknar ut  $Ap_1 = A^2p_0$  får vi reda på sannolikheten att den hamnar på de olika ställena efter en andra uthyrning. Totalt alltså

$$p_n = A^n p_0.$$

Vi har lärt oss att vi kan beräkna dessa sannolikheter på följande sätt: först bestämmer vi egenvärden (det finns tre olika) och motsvarande egenvektorer, varefter vi skriver

$$A = TDT^{-1}$$

där  $D$  är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen, och  $T$  består av egenvektorena (som är tre olika) tillhörande dessa egenvärden. Sedan kan vi räkna ut  $A^n = TD^nT^{-1}$ .

Men låt oss räkna så lite som möjligt och istället tänka ut vad som måste gälla. För att förenkla diskussionen räknar vi dock först ut egenvärdena vilka blir

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{10}(1 + 2\sqrt{5}) \approx 0.55, \lambda_3 = \frac{1}{10}(1 - 2\sqrt{5}) \approx -0.35.$$

Låt egenvektorena vara  $v_1, v_2, v_3$  till de tre olika egenvärdena  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Då kan vi skriva

$$p_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3.$$

Från detta får vi

$$p_1 = Ap_0 = c_1Av_1 + c_2Av_2 + c_3Av_3 = c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + c_3\lambda_3v_3$$

och fortsätter vi på samma sätt ser vi att

$$p_n = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2 + c_3\lambda_3^n v_3.$$

Men här gäller att  $\lambda_2^n \rightarrow 0$  och  $\lambda_3^n \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ , och eftersom  $\lambda_1 = 1$  så ser vi att

$$p_n \rightarrow c_1v_1.$$

Men eftersom alla  $p_n$  har summan ett måste det även gälla  $p = c_1v_1$ , så detta är egenvektorn till egenvärdet 1 som är sådan att summan av elementen är ett.

Löser vi det relevanta ekvationssystemet ser vi att  $v_1 = t(34, 14, 13)$ , och alltså att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{61}(34, 14, 13).$$

Från detta drar vi slutsatsen att bilen efter lång tid kommer att återfinnas på ställe  $A$  i  $34/61 \approx 56\%$  av fallet, på  $B$  i  $14/61 \approx 23\%$  av fallen och till  $C$  i  $13/61 \approx 21\%$  av fallen.

En stunds eftertanke visar att detta faktiskt gäller oavsett var bilen startade. Kan du tänka ut varför?

Här är ett annat exempel att ha som övning:

**Övning** En entreprenör har just gett sig in i en bransch för att konkurrera med en väletablerad vara. Det visar sig att varje månad så omvänder entreprenörens företag 2 procent av de som använder den etablerade varan. Men det visar sig också att varje månad går 5 procent av entreprenörens kunder tillbaka till den etablerade varan.

Hur lång tid kommer det att ta innan entreprenören har minst 20 procent av marknaden? Vad händer efter lång tid?

Arbeta gärna igenom följande exempel (med dator eller miniräknare) som är en annan illustration av Markovkedjor:

**Exempel** I England omkring 1950 arbetade man med tre socialgrupper. Data hade visat att sannolikheterna för övergångar (far-son) mellan de olika socialgrupperna kunde beskrivas av följande matris (kolonnerna är fader, raderna son):

$$\begin{pmatrix} 0.448 & 0.054 & 0.011 \\ 0.484 & 0.699 & 0.503 \\ 0.068 & 0.247 & 0.486 \end{pmatrix}.$$

T.ex. gäller att sannolikheten att sonen är i socialgrupp 3 om fadern är socialgrupp 2 lika med 0.247.

Denna matris har kolonnsummor ett och ett egenvärde som är ett med tillhörande egenvektor

$$p = (0.067, 0.624, 0.309).$$

Visa att detta innebär att efter lång tid kommer 62.4% av alla engelsmän att tillhör socialgrupp 2, och bara så lite som 6.7% socialgrupp 1. (Vad är det du ska visa?)

## Att lösa andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter med hjälp av matriser

Från endim-kursen vet vi att för att lösa differentialekvationen

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0,$$

ska vi först lösa den karakteristiska ekvationen (obs!-samma namn som för egenvärdesekvationen)

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

eftersom lösningen då har formen  $Ae^{-2t} + Be^t$ , varefter vi bestämmer konstanterna. Vi ska nu se hur detta passar in i linjär algebran och det vi gjort.

Tricket är att införa en vektor

$$u(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

och då observera att

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ 2y(t) - y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att

$$u'(t) = Au(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

För att lösa detta, antag att vi kan diagonalisera  $A$  så att  $T^{-1}AT = D$  för någon inverterbar matris  $T$  och diagonalmatris  $D$ . Om vi då skriver  $u(t) = Tw(t)$  för en ny funktion  $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ , så ser vi att

$$w'(t) = T^{-1}u'(t) = T^{-1}Au(t) = T^{-1}ATw(t) = Dw(t).$$

Denna ekvation  $w'(t) = Dw(t)$  är bara två oberoende ekvationer

$$w_1'(t) = \lambda_1 w_1(t), \quad w_2'(t) = \lambda_2 w_2(t),$$

där  $\lambda_1, \lambda_2$  är diagonalelementen i  $D$ . Dessa vet vi lösningen på:

$$w_1(t) = Ae^{\lambda_1 t}, \quad w_2(t) = Be^{\lambda_2 t}.$$

Sedan får vi  $y(t)$  genom att avläsa första raden i  $Sw(t)$ .

Vi genomför nu detta. För att se om vi kan diagonalisera ska vi bestämma egenvärdena till  $A$ :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

så egenvärdena är (se ovan)  $\lambda = -2, 1$ . Motsvarande egenvektorer är (efter en kort räkning) kolonnvektorer i

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

och vi har då att  $D = T^{-1}AT$  där

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu har vi siffror till diskussionen ovan och ser då att

$$u(t) = Tw(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{-2t} \\ Be^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{-2t} + Be^t \\ -2Ae^{-2t} + Be^t \end{pmatrix}.$$

Men  $u(t) = (y(t), y'(t))$ , så vi kan avläsa att  $y(t) = Ae^{-2t} + Be^t$ , precis som vi lärde oss i endim:en.

**Exempel** Om vi lägger på begynnelsevillkoren  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , hur kan du modifiera räkningarna så att du får den rätta lösningen

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$$

utan att införa konstanter  $A, B$  i räkningarna?