

Innehåll: Egenvärden och egenvektorer

Kapitel 10.1-10.4

Efter dagens föreläsning måste du

- Kunna bestämma alla egenvärden och egenvektorer till en matris
- Veta vad som menas med att diagonalisera en matris

Inledande exempel

Föregående gång(?) gjorde vi följande exempel

Exempel Spegling i planet $\pi : x_1 - x_2 - x_3 = 0$ (i en given ON-bas) har avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Men vi såg att om vi valde en ny bas, så fick den enklare formen

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den bas vi valde bestod av

1. två basvektorer i planet $\pi : \vec{u}_1 = (1, 1, 0), \vec{u}_2 = (1, 0, 1)$
2. en basvektor $\vec{u}_3 = (1, -1, -1)$ som är ortogonal mot planet π .

Varför valde vi den basen, och varför blev avbildningsmatrisen mycket enklare då?

För att svara på den frågan, tänk efter vad vektorerna $\vec{u}_i$ avbildas på. Geometriskt, inte genom att räkna!

Svaret är att de som ligger i planet, ändrar sig inte vid spegling:

$$A\vec{u}_1 = \vec{u}_1, \quad A\vec{u}_2 = \vec{u}_2,$$

medan den återstående basvektorn avbildas på minus sig själv:

$$A\vec{u}_3 = -\vec{u}_3.$$

Det är vad A' berättar för oss.Det gemensamma är att de är vektorer $\vec{u} \neq 0$ sådana att det finns ett tal λ , som beror på vektorn, sådant att

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}.$$

Sådana vektorer är väldigt bra att använda som bas när man ska förstå vad en linjär avbildning betyder.

Egenvärden och egenvektorer

Om A är en kvadratisk matris och x (ej nollvektor) en kolonnvektor sådan att det finns ett tal λ att

$$Ax = \lambda x,$$

så kallas x en egenvektor och λ ett egenvärde till A .*Anmärkning* Förvillas inte av att jag nu kallar vektorn x istället för $\vec{u}$. Det beror på att i exemplet ville jag att ni skulle tänka i termer av geometriska vektorer, men i fortsättningen blir det mest en fråga om matrisräkning.**Exempel** Vektorerna $x_1 = (1, 1, 0), x_2 = (1, 0, 1)$ är båda egenvektorer till A i föregående exempel med egenvärdet $\lambda = 1$ medan $x_3 = (1, -1, -1)$ är en egenvektor med egenvärdet -1 .Notera (tänk efter) att varje linjärkombination av x_1, x_2 är också en egenvektor till A med egenvärdet $\lambda = 1$.

Vårt problem nu är, finns det någon metod att hitta egenvektorer och egenvärden? Det verkar ju som att de kan hjälpa oss att beskriva och analysera linjära avbildningar!

Det gör det enligt följande resonemang. Om $x \neq 0$ löser ekvationen $Ax = \lambda x$, så löser den ekvationen $(\lambda I - A)x = 0$. Denna ekvation är alltså inte entydigt lösbar, varför matrisen $\lambda I - A$ inte kan vara inverterbar, vilket vi sett betyder att dess determinant måste vara noll:

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Detta är en polynomekvation i λ , vars lösningar alltså ger vilka egenvärden som matrisen A har. Och till varje egenvärde kan vi sedan bestämma en eller flera egenvektorer. Polynomet $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ kallas det *karakteristiska polynomet* för A och ekvationen $p_A(\lambda) = 0$ den *karakteristiska ekvationen*.*Anmärkning* Notera att den karakteristiska ekvationen garanterar att det finns ett $x \neq 0$ sådant att $(\lambda I - A)x = 0$.

För att se hur detta fungerar använder vi exemplet ovan.

Exempel För att bestämma egenvärdena till matrisen A i det inledande exemplet beräknar vi det karakteristiska polynomet $p_A(\lambda) =$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \lambda - 1 & \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \\ (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \lambda + \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \\ = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} &= (\lambda - 1) \left((\lambda + \frac{1}{3})(\lambda - \frac{1}{3}) - \frac{8}{9} \right) = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Vi ser därför att A har två egenvärden $\lambda = 1$ (dubbelt) och $\lambda = -1$.

För att bestämma motsvarande egenvektorer måste vi lösa motsvarande ekvationssystem:

1. För $\lambda = 1$ ska vi lösa

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

så lösningen är planet $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Egenvektorer är alltså alla vektorer (utom 0) i detta plan.

2. För $\lambda = -1$ ska vi lösa

$$\begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Här är den tredje ekvationen summan av de två ovan, så lösningen är den linje som utgör skärningen mellan planen $2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. En kort räkning visar att det är $(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, -1)$. Alla vektorer på denna linje (utom 0) är alltså egenvektorer till egenvärdet $\lambda = -1$ till A .

Ett ytterligare exempel

Vi ska nu använda det ovan till att försöka förstå vilken linjär avbildning som beskrivs av matrisen

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

För att undvika att räkna med bråk inför vi matrisen $B = 6A$ som endast har heltalselement. Vi ser då att λ är ett egenvärde till A precis då 6λ är ett egenvärde till B . Dessutom är egenvektorer desamma (tänk efter!). Vi bestämmer därför det karakteristiska polynomet till B :

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$(\lambda-6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-6) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -4 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-6) \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -\lambda & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-6) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\lambda & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-6)^2$$

Egenvärdena till B är alltså $\lambda = 0$ och $\lambda = 6$ (dubbelt), så egenvärdena till A är $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$ (dubbelt).

Vi bestämmer nu egenvektorer:

1. Egenvektorer till egenvärdet $\lambda = 0$ får vi genom att lösa (kontrollera att du förstår varför!)

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 12x_2 + 24x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = t(1, 2, -1).$$

2. Egenvektorer till A med egenvärdet $\lambda = 1$ fås genom att lösa

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1).$$

Låt oss nu ta dessa egenvektorer som en ny bas. Med beteckningar från tidigare betyder det att vi tar $e' = eT$, där

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det innebär att de nya och de gamla koordinaterna förhåller sig till varandra genom $x = Tx'$ och vi ser då att ekvationen $y = Ax$ svarar mot $y' = A'x'$ där $A' = T^{-1}AT$. Det betyder att matrisen

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

blir matrisen för avbildningen i den bas som utgörs av egenvektorer. Avläser vi matrisen ser vi att A betyder projektion på planet $\pi : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ längs vektorn $(1, 2, -1)$. Med andra ord, den linjära avbildningen är den ortogonala projektionen på planet π .

Vi ser att om vi hittar en bas av egenvärden så får avbildningsmatrisen i denna bas en enkel, diagonalform, från vilken vi kan utläsa vad avbildningen är för något. Vi ska återkomma till det i nästa föreläsning.

Anmärkning När vi beräknade A' behövde vi invertera T . Ur räkneteknisk synvinkel kan det därför vara smart att välja en ON-bas av

egenvektorer i planet. Vi gör detta enkelt med Gram-Schmidts ortogonaliseringsförfarande. Vi får då den ortogonala bastransformationsmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

vilken visserligen ser krångligare ut, men är enklare att invertera!

Diagonalisering av en matris

Vi börjar med följande observation

Lemma Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende.

Bevis. Antag att $e_1, \dots, e_k$ är egenvektorer till de olika egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ och att de är linjärt beroende men att varje delmängd av $k-1$ vektorer är linjärt beroende. Då finns alltså $s_1, \dots, s_k$ sådana att $\sum_i s_i e_i = 0$ och då är även

$$0 = F(\sum_i s_i e_i) = \sum_i s_i F(e_i) = \sum_i s_i \lambda_i e_i.$$

Det följer att

$$\sum_i s_i \lambda_i e_i - \lambda_k \sum_i s_i e_i = \sum_i s_i (\lambda_i - \lambda_k) e_i = 0.$$

Detta är en linjärkombination av $e_1, \dots, e_{k-1}$ som blir noll, vilket är en motsägelser $\square$

Definition En linjär avbildning sägs var diagonaliserbar om det finns en bas i vilken avbildningsmatrisen är en diagonalmatris (dvs alla element utanför diagonalen är noll).

Ett alternativt sätt att uttrycka detta är att säga att

en matris A är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris T sådan att

$$T^{-1}AT = D,$$

där D är en diagonalmatris. Att bestämma T och D brukar kallas att diagonalisera A .

Anmärkning Här är alltså A matrisen till den linjära avbildning i någon första bas e och den nya basen är $e' = eT$.

Anmärkning Matriserna T och D behöver inte vara entydigt bestämda; T beror på vilken bas vi väljer och D på i vilken ordning den nya basen placeras i T . Dock kommer elementen i D av nödvändighet vara egenvärdena till A eftersom

$$\det(\lambda I - A) = \det(T(\lambda I - D)T^{-1}) = \det(\lambda I - D).$$

Notera att eftersom T består av egenvektorer är en $n \times n$ -matris A diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer. (Varför kan den inte ha fler?) Speciellt följer att

En $n \times n$ -matris A är alltid diagonaliserbar om den har n olika egenvärden.

En annan observation värd att göra är att

A är inverterbar precis då inget egenvärde är noll.

Tänk efter!!! Liksom att om x är en egenvektor till den inverterbara matrisen A så är x också en egenvektor till inversen A^{-1} . Vad gäller för egenvärdena?

Om ett egenvärde som nollställe till $p_A(\lambda)$ är multipelt av ordning k sägs egenvärdet ha *algebraisk multiplicitet* k . Med den *geometriska multipliciteten* menas $\dim N(\lambda E - A)$. Det gäller att den geometriska multipliciteten av ett egenvärde alltid är mindre än eller lika med den algebraiska. Om sträng olikhet gäller för något egenvärde är matrisen inte diagonaliserbar.

Spektralsatsen

Observera att $p_A(\lambda)$ är ett n :te-gradspolynom, och har alltså n olika komplexa nollställen. Dessa kan vara reella eller komplexa! Vi har nu följande observation:

En (reell) symmetrisk matris har endast reella egenvärden

Bevis. Om $Ax = \lambda x$ så är $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ och alltså (eftersom $A^t = A$)

$$\lambda|x|^2 = \lambda x^t \bar{x} = (Ax)^t \bar{x} = x^t A \bar{x} = x^t \bar{\lambda} \bar{x} = \bar{\lambda} x^t \bar{x}. \quad \square$$

En annan observation är att

om A är symmetrisk, så gäller att egenvektorer till olika egenvärden måste vara ortogonala

Bevis. Om $Av_i = \lambda_i v_i$ så gäller att

$$\lambda_i v_i^t v_k = (Av_i)^t v_k = v_i^t A^t v_k = v_i^t A v_k = \lambda_k v_i^t v_k,$$

vilket betyder att om $\lambda_i \neq \lambda_k$ så måste $v_i^t v_k = v_i \cdot v_k = 0$. $\square$

Anmärkning En linjär avbildning är en projektion om dess avbildningsmatris är sådan att $A^2 = A$. Vi ser då från observationen ovan att om A är symmetrisk så måste projektionen vara ortogonal (tänk efter varför!). Här gäller också omvändningen.

Sats (Spektralsatsen) Låt F vara en symmetrisk, linjär avbildning på ett euklidiskt rum V . Då har F en ON-bas av egenvektorer.

Bevis. Man gör ett induktionsbevis som bygger på följande observation. Låt λ_1 vara ett (reellt) nollställe till den karakteristiska ekvationen och e_1 en tillhörande egenvektor av längd 1. Sätt

$$U = e^\perp = \{u \in V; (u|e_1) = 0\}.$$

Eftersom F är symmetrisk avbildar den U på U :

$$(F(u)|e_1) = (u|F(e_1)) = (u|\lambda_1 e_1) = 0.$$

Man kan nu lätt bygga upp ett induktionsbevis (se boken). $\square$

För matriser får vi följande sammanfattning

Om A är en symmetrisk matris så är den diagonaliserbar: alla egenvärden är reella och vi har en ortonormerad bas av egenvektorer, vilket är ekvivalent med att säga att det finns en ortogonal matris T sådan att $T^t A T = D$.