

Innehåll: Projektioner och Isometrier

Kapitel 9.3–95

Efter dagens föreläsning måste du

- Veta vad projektioner, speglingar och isometrier är för något
- Kunna avgöra vilken typ av avbildning i rummet vissa typer av avbildningsmatriser svarar mot

Direkt summa och projektioner

Definition Vektorrummet V är den direkta summan av underrumen U_1 och U_2 , skrivs

$$V = U_1 \oplus U_2,$$

om $V = U_1 + U_2$ och $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Anmärkning Med andra ord, om varje vektor u i V på ett entydigt sätt kan skrivas

$$u = u_1 + u_2, \quad \text{där } u_1 \in U_1, u_2 \in U_2.$$

Till en direkt summa har vi två linjär avbildningar P_1, P_2 som definieras av

$$P_1(u) = u_1, \quad P_2(u) = u_2.$$

P_1 kallas projektionen på U_1 parallell med U_2 (och motsvarande för P_2). Vi ska snart karakterisera sådana avbildningar. Först dock en annan definition.

Definition En linjär avbildning F på ett euklidiskt rum V sägs vara symmetrisk om

$$(F(u)|v) = (u|F(v)), \quad \text{för alla } u, v \in V.$$

Om vi specificerar en ON-bas i V så gäller att $(x|y) = x^t y$ och villkoret kan då skrivas $(Ax)^t y = x^t (Ay)$, dvs

$$x^t A^t y = x^t Ay.$$

Eftersom det ska gälla för alla x, y måste $A = A^t$.

Avbildningsmatrisen till en symmetrisk matris i en ON-bas är symmetrisk.

Åter till projektionerna. Vi inser att $P_1^2(u) = P_1(u) = u$, och detta villkor karakteriserar projektioner:

Sats Om P är en linjär avbildning på V sådan att $P^2 = P$ så är P projektionen på $V(P)$ längs $N(P)$.

Om V är ett euklidiskt rum är P en ortogonal projektion om och endast om P är symmetrisk.

Anmärkning Med ortogonal projektion menas att vektorerna i U_1 och i U_2 är ortogonala mot varandra.

Bevis. Om $u \in V$, skriv $u_1 = P(u)$, $u_2 = u - P(u)$. Då är

$$P(u_2) = P(u) - P^2(u) = 0 \Rightarrow u_2 \in N(P).$$

Det följer att $V = V(P) + N(P)$. För att visa att $V(P) \cap N(P) = \{0\}$ tar vi $v = P(u) \in V(P)$. Då gäller att

$$v = P(u) = P^2(u) = P(v)$$

och om $v \in N(P)$ så måste därför $v = 0$.

För de andra delen har vi att om P är en ortogonal projektion

$$(P(u)|v) = (u|v) = (u_1|v_1)$$

där $v = v_1 + v_2$ är uppdelningen av v . Från detta följer att P är symmetriskt. Omvänt, om P är en symmetrisk projektion så gäller att om $v \in N(P)$ och $w \in V(P)$

$$(w|v) = (P(u)|v) = (u|P(v)) = 0,$$

så alla vektorer i $N(P)$ och $V(P)$ är ortogonala. $\square$

Exempel För matrisen (i någon ON-bas)

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gäller att $A^2 = A$, så motsvarande avbildning är en projektion på $V(A)$ längs $N(A)$. En räkning ger att

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = t(1, -2, 1)$$

så enligt dimensionssatsen är $V(A)$ 2-dimensionellt. Det spänns upp av t.ex. de två sista kolonnvektorererna och dess ekvation fås då av

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ y & -3 & -4 \\ z & 3 & 5 \end{vmatrix} = x + 3y + 2z = 0.$$

Avbildningen är därför projektionen på detta plan längs linjen $t(1, -2, 1)$.

Eftersom matrisen inte är symmetrisk är det inte en ortogonal projektion, vilket ju stämmer eftersom normalen till värderummet är $(1, 3, 2)$.

Vi kan använda MK-metoden för att bestämma matrisen för att bestämma den ortogonala projektionen på ett underrum $U = V(B)$. Vi vet nämligen att $y^{approx} = Bx$ där x löser normalekvationen, alltså

$$x = (B^t B)^{-1} B^t y.$$

Det följer att matrisen för den ortogonala projektionen på U ges av

$$B(B^t B)^{-1} B^t.$$

Som är en symmetrisk matris!

Exempel Låt U vara ett plan i rummet genom origo med enhetsnormal n . Då gäller att $U^\perp = V(n)$, så den ortogonala projektionen på $U^\perp$ ges av nn^t eftersom $n^t n = |n|^2 = 1$. Den ortogonala projektionen på U ges därför av $P = I - nn^t$ (projektionsformel). Så ortogonal projektion på $x - y - z = 0$ får avbildningsmatrisen

$$A = E - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ -1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Speglingar

Om P är en projektion kallas

$$S = I - 2P, \quad I(u) = u,$$

för en spegling. För den har vi att

$$S^2 = I - 4P + 4P^2 = E - 4(P - P^2),$$

så

$$S = I \iff P^2 = P.$$

Man pratar om spegling i $V(P)$ längs $N(P)$; om P är en ortogonal projektion säger man bara spegling i $V(P)$.

Exempel Matrisen

$$S = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk och sådan att $S^2 = E$. Det betyder att den geometriskt beskrivs av en spegling i ett underrum. Underrummet ges av villkoret

$$Sx = x$$

som efter uträkning visar sig vara $x + 2y + 3z = 0$.

Isometrier

En isometri är en avbildning sådan att

$$|F(u)| = |u|.$$

Eftersom

$$2|u|v = |u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2,$$

så följer att

$$\begin{aligned} 2(F(u)|F(v)) &= |F(u) + F(v)|^2 - |F(u)|^2 - |F(v)|^2 \\ &= |u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2 = 2(u, v) \end{aligned}$$

vilket betyder att

Isometrier bevarar skalärprodukt:

$$(F(u)|F(v)) = (u|v).$$

Om A är avbildningsmatrisen i en ON-bas för en isometri gäller att

$$(Ax)^t(Ay) = x^t y \iff x^t A^t A y = x^t y$$

för alla x, y , vilket betyder att A är ortogonal.

Isometrier i planet

Om e_1, e_2 är en ON-bas i V så måste $|F(e_1)| = |F(e_2)| = 1$ och $F(e_1) \perp F(e_2)$. Det betyder att

$$F(e_1) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \quad F(e_2) = \pm(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2)$$

så vi har två fall:

1. Med plustecknet får vi en rotation vinkel θ moturs. Determinanten för den avbildningen är ett.
2. Med minustecknet får vi att $F(e_i)$ fås genom att vi speglar e_i i linjen L genom origo som har riktningskoefficient $\tan(\theta/2)$ för både $i = 1, 2$. Geometriskt innebär den därför spegling i L . Dess determinant är -1 .

Anmärkning Vad är sammansättningen av två speglingar? Dess determinant är $(-1)^2 = 1$, och är därför en rotation.

Isometrier i rummet

Även här finns i princip två fall: antingen finns en enhetsvektor e sådan att $F(e) = e$, eller så finns det inte.

Om det finns en sådan enhetsvektor så avbildas även underrummet $U = e^\perp$ på sig själv av F . Avbildningen $F : U \rightarrow U$ blir då enligt ovan antingen en rotation eller en spegling:

1. i det första fallet är alltså avbildningen en rotation av rummet runt den linje som har riktningskoefficient e . Det betyder att $\det F = +1$.
2. i det andra fallet blir det en spegling i det plan som bildas av L och e . Det betyder att $\det F = -1$.

Anmärkning Tänk noga efter varför determinanterna blir som sägs! Man väljer en lämplig ON-bas i rummet.

Vi kan formulera om det andra villkoret. Om $\det F = -1$ så gäller att $\det(-F) = 1$ (eftersom -1 är i udda dimensioner!) och om vi låter S vara spegling i origo (dvs $S(u) = -u$) så gäller alltså att $S \circ F$ är en rotation. Så fallet $\det F = -1$ (tillsammans med att det finns ett e) innebär att F är en rotation åtföljd av en spegling i origo.

Därmed har vi visat ena halvan av följande sats.

Sats Låt V vara en isometri på ett 3-dimensionellt euklidiskt rum. Då gäller att

1. om $\det F = 1$ är F en rotation
2. om $\det F = -1$ är F en rotation åtföljd av en spegling i origo.

Bevis. Det återstår att studera fallet då det inte finns något e sådant att $F(e) = e$. Låt e vara en godtycklig enhetsvektor och låt U vara underrummet med normal $F(e) - e \neq 0$. Låt S vara spegling i U . Eftersom

$$|F(e) - e|^2 = |F(e)|^2 - 2(F(e)|e) + |e|^2 = 2(1 - (F(e)|e))$$

så blir

$$S(F(e)) = F(e) - 2 \frac{(F(e)|F(e) - e)}{2(1 - (F(e)|e))} (F(e) - e) = F(e) - (F(e) - e) = e.$$

Då gäller alltså att avbildningen $G = S \circ F$ är sådan att $G(e) = e$ och eftersom den är en isometri vet vi hur den ser ut. Men det följer att $SG = S^2 F = F$. Så om G är en rotation i ett plan så blir F en rotation följt av en spegling, medan om G är en spegling i ett plan så blir F sammansättningen av två speglingar, och alltså en rotation. $\square$

Exempel Matrisen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

är en ortogonal och beskriver därför (i en ON-bas) en isometri. Dess determinant är $+1$, så vi har en rotation.

För att bestämma rotationsaxeln ska vi lösa $Ax = x$. Lösningen är $t(1, 1, 1)$.

Nästa steg är att bestämma rotationsvinkeln. För det tar vi en vektor vinkelrät mot rotationsaxeln, t.ex. $v = (1, -1, 0)$. Då gäller att $F(v) = (1, 0, -1)$ och vi får att $\cos \theta = 1/2$. Det betyder att $\theta = \pm\pi/3$.

För att bestämma tecknet beräknar vi

$$v \times F(v) = (1, -1, 0) \times (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$$

Svar: Sett från spetsen av vektorn $(1, 1, 1)$ betyder F en rotation $\pi/3$ radianer moturs.