

Innehåll: Linjära avbildningar

Kapitel 9.1–9.2

Efter dagens föreläsning måste du

- veta vad det innebär för en funktion att vara linjär och hur sådana kan beskrivas med hjälp av matriser
- känna till olika sätt att hitta avbildningsmatrisen till en linjär avbildning
- kunna förklara varför avbildningsmatrisen är ortogonal precis då avbildningen är en isometri

Linjära avbildningar på ett vektorrum

Att en funktion $F: V \rightarrow V$, där V är ett vektorrum, innebär att följande gäller:

$$F(u+v) = F(u) + F(v), \quad F(\lambda u) = \lambda F(u).$$

En linjär avbildning kan alltid skrivas som en matrismultiplikation: om vi skriver $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ så gäller att

$$F(u) = x_1 F(e_1) + \dots + x_n F(e_n) = Ax, \quad A = (F(e_1) \dots F(e_n)).$$

Kolonnerna i matrisen A ges alltså av de vektorer i R^n som baselementen i R^n avbildas på. Matrisen kallas F 's avbildningsmatris. Dess kolonner ges av $A_i = F(e_i)$!

Exempel Antag att $F(2,1) = (-1,2)$ och $F(3,4) = (4,1)$ och att F är linjär. Eftersom $(-5,0) = (3,4) - 4(2,1)$ kan vi då beräkna

$$F(-5,0) = F(3,4) - 4F(2,1) = (4,1) - 4(-1,2) = (8,-7).$$

Ur det kan vi sedan dra slutsatsen att

$$F(1,0) = -\frac{1}{5}F(-5,0) = (-\frac{8}{5}, \frac{7}{5}).$$

På samma sätt är $(0,-5) = 3(2,1) - 2(3,4)$ och vi får att $F(0,1) = (\frac{11}{5}, -\frac{4}{5})$. Denna linjära avbildning har alltså avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{11}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning En linjär avbildning måste vara sådan att $F(0) = 0$!

Exempel på linjära avbildningar

Exempel Att rotera plana geometriska vektorer vinkeln θ moturs är en linjär avbildning (om man roterar en summa av två vektorer får man samma resultat om man först roterar vektorerna och sedan tar summan och det spelar ingen roll om man multiplicerar med ett tal före eller efter rotationen).

Om vi inför en ortonormerad bas e_1, e_2 så att vi får vårt "vanliga" koordinatsystem, så har vi att

$$\begin{cases} F(e_1) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \\ F(e_2) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})e_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})e_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \end{cases}.$$

Det betyder att avbildningsmatrisen för denna avbildning i denna bas (samma bas i värderummet) ges av

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Anmärkning Om vi istället ser planet som det komplexa talplanet så gäller att denna avbildning svarar mot multiplikation med $e^{i\theta}$. Men det ger samma resultat: om vi skriver $z = x_1 + ix_2$ och $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ så blir resultatet

$$e^{iz} = (\cos \theta + i \sin \theta)(x_1 + ix_2) = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta + i(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

och skriver vi detta som $y_1 + iy_2$ så har vi att

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Samma som ovan!

Att se vad basvektorer avbildas på är ett sätt att bestämma avbildningsmatrisen. Alternativt kan man se vad en allmän punkt (vektor) avbildas på. Notera att med ett givet origo behöver vi inte skilja på punkt och vektor.

Exempel Att projicera en punkt i rummet längs en vektor (i något lämpligt koordinatsystem) $\vec{v} = (3,1,-1)$ på planet $\pi: x - 2y + 3z = 0$ definierar en funktion. Vi ska bestämma den.

Innan vi gör det, börja med det enklare(?) problemet: på vilken punkt avbildas punkten $(3,3,3)$?

Det vi måste inse nu är att lösningen är den punkt som är skärningen mellan linjen $(x,y,z) = (3,3,3) + t(3,1,-1) = (3+3t, 3+t, 3-t)$ och planet π . Varför?

Skärningen fås genom att vi bestämmer det t som uppfyller $(3+3t) - 2(3+t) + 3(3-t) = 0$, vilket är $t = 3$. Motsvarande punkt är då $(12,6,0)$.

För att nu bestämma funktionen ersätter vi nu $(3,3,3)$ med en godtycklig punkt (x_1, x_2, x_3) , men gör precis likadant som ovan. Linjen blir $(x,y,z) = (x_1+3t, x_2+t, x_3-t)$ och det t som ger skärningspunkten blir

$$t = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + 3x_3).$$

Detta betyder att slutpunkten blir

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + 3x_3)(3, 1, -1) =$$

$$\frac{1}{2}(5x_1 - 6x_2 + 9x_3, x_1 + 3x_3, x_1 + 2x_2 + 5x_3).$$

På matrisform kan vi skriva detta $F(x) = Ax$ (där jag låter x i högerledet vara en kolonnvektor vid beräkningen av produkten) där

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att F är en linjär avbildning och A dess avbildningsmatris.

Anmärkning Vad är $V(A)$ och $N(A)$ i detta exempel? Kontrollera att dimensionssatsen gäller!

Exempel Bestäm avbildningsmatrisen för den funktion som beskriver ortogonal projektion på planet $\pi: x - y - z = 0$ (i en ortonormerad bas).

Alternativ 1: Gör som i förra exemplet: en normal till π är $\vec{n} = (1, -1, -1)$, så det är längs den vi ska projicera. Linjen (se förra exemplet) blir $(x,y,z) = (x_1, x_2, x_3) + t(1, -1, -1)$ och skärningen ger $t = -(x_1 - x_2 - x_3)/3$ och vi får alltså att

$$F(x) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1) = \dots =$$

$$\left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right).$$

Vi ser att det är en linjär avbildning med avbildningsmatris

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativ 2: Det är egentligen endast i början detta steg skiljer sig. En enhetsnorm till planet ges av $\vec{n} = (1, -1, -1)/\sqrt{3}$ och enligt projekteringsformeln gäller därför att projektionen av vektorn $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ på normalen till planet genom origo är vektorn $\vec{u}' = (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1)$. Motsatt riktning med denna från punkten ger oss den ortogonala projektionen:

$$\vec{u} - \vec{u}' = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1),$$

vilket är samma uttryck som dyker upp ovan. Fortsättningen är densamma.

Alternativ 3: Ett tredje alternativ är att göra som vi gjorde för rotationen ovan, nämligen att se efter vad de tre basvektorerna $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ avbildas på. Det innebär att göra räkningarna ovan tre gånger med olika punkter och vi får att

$$F(e_1) = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad F(e_2) = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \quad F(e_3) = \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

Vi kan sedan skriva upp avbildningsmatrisen med dessa som kolonner.

Anmärkning Vad är $V(A)$ och $N(A)$ i detta exempel? Kontrollera att dimensionssatsen gäller!

Exempel Vi ska nu bestämma den funktion $G(x)$ som beskriver spegling i planet $\pi : x - y - z = 0$.

Spegling startar med ortogonal projektion, men man fortsätter lika långt på andra sidan. Vi kan därför utnyttja räkningarna ovan och får att

$$G(x) = \vec{u} - 2\vec{u}' = (x_1, x_2, x_3) - 2\frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1)$$

och lite räknande visar att $G(x) = Bx$ där

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exempel Ange den funktion $H(x)$ som beskriver ortogonal projektion på planet $\pi : x - y - z = 1$.

Det som skiljer detta exempel är att planet nu inte går genom origo! Räknar vi som ovan (gör det!!!) ser vi att

$$H(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Detta är *inte* en linjär avbildning, vilket man ser t.ex. av att $H(0, 0, 0) = \frac{1}{3}(1, -1, -1)$; om avbildningen var linjär skulle detta vara noll. Man säger att $H(x) = b + Ax$ där $b \neq 0$ är en affint linjär avbildning, och en sådan kan bli linjär genom att vi väljer ett nytt origo. I vårt fall någon punkt i planet.

Sammansättning av linjära avbildningar

Låt F och G vara två linjära avbildningar på ett vektorrum V och låt A respektive B vara motsvarande avbildningsmatriser i en given bas. Då gäller att

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(Bx) = A(Bx) = (AB)x,$$

d.v.s. avbildningsmatrisen för den sammansatta funktionen $F \circ G$ ges av AB . Det betyder att avbildningsmatrisen för $G \circ F$ ges av BA .

Exempel Med

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Får vi att

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}$$

vilket, om vi tolkar matriserna som rotationer, leder till additionsformlerna för sinus och cosinus.

Exempel Betrakta följande två avbildningar

- P som innebär att vi först speglar i planet $\pi : x - y - z = 0$ och sedan i yz -planet
- Q som innebär att vi först speglar i yz -planet och sedan i planet $\pi : x - y - z = 0$.

Vi har redan använt att spegling i planet π har avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

och vi inser lätt att spegling i yz -planet har avbildningsmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om $F(x)$ är spegling av punkten x i planet π så gäller alltså att $F(x) = Ax$, och om $G(x)$ är spegling av punkten x i yz -planet, så gäller att $G(x) = Bx$.

Vi ser därför att

$$P(x) = G(F(x)) = G(Ax) = B(Ax) = (BA)x,$$

men att

$$Q(x) = F(G(x)) = F(Bx) = A(Bx) = (AB)x.$$

Vi ser att P får avbildningsmatrisen

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

medan Q får avbildningsmatrisen

$$AB = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notera att ordningen spelar roll!

Basbyten

Följande är viktigt att förstå:

Avbildningsmatrisen till en linjär avbildning beror på valet av bas!

Det betyder att den ändrar utseende när vi byter bas. Hur?

Exempel Låt e_1, e_2 vara en bas i planet och definiera

$$\begin{cases} e'_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ e'_2 = e_1 + 2e_2 \end{cases}.$$

Då gäller att även e'_1, e'_2 är en bas i planet (varför?). Om en vektor u har koordinaterna (x_1, x_2) i den första basen och koordinaterna (x'_1, x'_2) i den andra, så gäller då att

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2.$$

Stoppa vi in uttrycken för den primmade basen i högerledet får vi att

$$u = x'_1(3e_1 - 2e_2) + x'_2(e_1 + 2e_2) = (3x'_1 + x'_2)e_1 + (-2x'_1 + 2x'_2)e_2.$$

Eftersom koordinaterna är entydigt bestämda följer att

$$\begin{cases} x_1 = 3x'_1 + x'_2 \\ x_2 = -2x'_1 + 2x'_2 \end{cases}.$$

Låt oss nu generalisera detta.

Låt $e_1, \dots, e_n$ och $e'_1, \dots, e'_n$ vara två baser i vektorrummet V . Motsvarande koordinater skriver vi $x_1, \dots, x_n$ respektive $x'_1, \dots, x'_n$. Det betyder att

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n$$

Låt $x = (x_1, \dots, x_n)$. Då kan vi skriva

$$u = ex = e'x'$$

där x är en kolonnmatris och $e = (e_1, \dots, e_n)$ en rad av basvektorer (ingen vektor, en vektor av vektorer). Använt på e'_i definieras kolonnmatriser T_i genom

$$e'_i = eT_i$$

och alltså en matris T sådan att $e' = eT$. Då får vi att

$$ex = (eT)x' = e(Tx'),$$

och alltså

$$x = Tx'.$$

Anmärkning I exemplet ovan har vi att

$$e' = (e'_1 e'_2) = (e_1 e_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

så

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Om vi vill ha x' uttryckta i x måste vi inverta matrisen:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Exempel Betrakta nu basbytet i rummet:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = 5\vec{e}_1 \quad \quad - 7\vec{e}_3 \end{cases}.$$

(Visa själv att de nya vektorerna verkligen är linjärt oberoende!) I beteckningarna ovan har vi $e' = eT$ med

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Resonemanget ovan visar därför att koordinatbytet ges av

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + 2x'_2 + 5x'_3 \\ x_2 = -2x'_1 + 3x'_2 \\ x_3 = -4x'_2 - 7x'_3 \end{cases}.$$

Vill vi ha x' uttryckt i x istället, inverterar vi matrisen.

Notera

- basbytesmatrisen T har som kolonnvektorer de nya baselementen (uttryckta i koordinater relativt de gamla)
- om $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ är en ON-bas så blir den nya basen en ON-bas om och endast om basbytesmatrisen är en ortogonal matris

Exempel Rotation i planet vinkeln θ moturs svarar mot basbytet $e' = eS$ ($e = (e_1 e_2)$ är en given ON-bas) där

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Det betyder att de nya koordinaterna fås ur de gamla genom $x = Tx'$, dvs $x' = T^{-1}x$. Men eftersom T är en ortogonal matris gäller att $T^{-1} = T^t$ och alltså

$$\begin{cases} x'_1 = \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 \\ x'_2 = -\sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \end{cases}.$$

Basbyten vid linjära avbildningar

Om vi startar i en e -bas och en linjär avbildning har avbildningsmatrisen A i den, och sedan inför en e' -bas så att koordinatbytet blir $x = TX'$, så ser vi att

$$y = Ax \Leftrightarrow Ty' = ATx'' \Leftrightarrow y' = T^{-1}ATx'$$

vilket betyder att i den nya basen har vi avbildningsmatrisen

$$A' = T^{-1}AT.$$

Anmärkning Vi har att

$$\det A' = \det T^{-1} \det A \det T = \det A,$$

så determinanten för den linjära avbildningen beror inte av vilken bas vi arbetar i. Vi kan därför tala om determinanten för den linjära avbildningen.

Anmärkning Om både e och e' är ON-baser, blir T ortogonal och vi får att $A' = T^t AT$.

Exempel Vi såg föregående gång att om vi inför en ON-bas i rummet och betraktar speglingen i planet $\pi : x_1 - x_2 - x_3 = 0$ så blir avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ska nu se hur denna avbildningsmatris ser ut om vi istället väljer en bas som har två element i π och det tredje som en normal till π .

Vi måste då först bestämma en bas för π , vilket vi gör genom att sätta $y = s$ och $z = t$. Vi har då att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En ny bas blir därför $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, -1, -1)$ och basbytesmatrisen ges av

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

I den nya basen blir vår linjära avbildning därför

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tänk efter vad detta betyder geometriskt!

Vi ser att om vi väljer vår bas lämpligt är det lättare att förstå vad en linjär avbildning betyder. I det här fallet, om vi hade A given och skulle förstå vad den beskriver, så ser vi att i den den primmade basen är den en spegling i $x_1'x_2'$ -planet.

Problemet är naturligtvis att det är inte självklart hur vi ska välja vår bas för att få en behändig form på avbildningsmatrisen. Eller?

Anmärkning Det beräkningsmässigt jobbiga steget i exemplet var nog att beräkna T^{-1} (vilket därför hoppades över). Man kan slippa det steget genom att välja en ON-bas, eftersom då vet vi att $T^{-1} = T^t$. Ofta kan det vara mer arbete, men i det här fallet är det enkelt: vi vet att $(1, 1, 0)$ och $(1, -1, -1)$ är ortogonala. Normera dem och tag deras vektorprodukt som den sista basvektorn, alltså

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Den är en ortogonal matris. Priset är att vi måste dras med några irrationella tal i räkningarna.