

Innehåll: Minsta kvadratmetoden

Kapitel 7.4–7.6

Efter dagens föreläsning måste du

- Veta vad som menas med ortogonala komplementet till ett under-
rum
- Kunna redogöra för matrisrangen av en matris
- Känna till minsta-kvadratmetoden och kunna härleda dess norma-
lekvation

Ortogonal komplement

Låt V vara ett Euklidiskt rum och U ett underrumAnmärkning Origo ligger i U !Det *ortogonala komplementet* till U ges av

$$U^\perp = \{v \in V; (u|v) = 0 \text{ för alla } u \in U\}.$$

Följande sats är nu fundamental.

Sats Till varje $u \in V$ finns entydigt bestämda $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$ sådana att

$$u = u' + u''.$$

 u' kallas den *ortogonala projektionen* av u på U .Beviset bygger på att vi konstruerar u' med hjälp av en ON-bas i U :

$$u' = (u|e_1)e_1 + \dots + (u|e_k)e_k.$$

Om vi sätter $u'' = u - u'$ så gäller att

$$(u''|e_j) = (u|e_j) + (u|e_j)(e_j|e_j) = 0,$$

så u'' är ortogonal mot U . Så det går.

Antag att det går på två olika sätt:

$$u = u' + u'' = v + w, \quad v \in U, w \in U^\perp.$$

Då gäller att $U \ni u' - v = w - u'' \in U^\perp$, d.v.s. denna vektor ligger i $U \cap U^\perp = \{0\}$. Det går alltså på precis ett sätt.

Direkt följer också att

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V. \quad (1)$$

För $v \in U$ har vi att

$$|u - v|^2 = |u - u'|^2 + |v - u'| = |u''|^2 + |v - u'|^2,$$

så det v som gör $|u - v|$ minimalt är $v = u'$. u' är alltså den vektor i U som ligger närmast u . Det minsta avståndet $= |u''|$.**Exempel** Låt $U \subset \mathbb{R}^4$ genereras av ON-basen

$$e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1).$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $u = (1, 2, 3, 4)$ på U .

Svar:

$$u' = (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = 5e_1 - e_2 = (2, 3, 2, 3).$$

Eftersom $u'' = (-1, -1, 1, 1)$ är kortaste avståndet från u till U är

$$|u''| = 2.$$

Matrisrang

Låt A vara en $p \times n$ -matris. Vi har

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x \text{ ortogonal mot raderna i } A$$

$$\Leftrightarrow x \text{ ortogonal mot kolonnerna i } A^t \Leftrightarrow N(A) = V(A^t)^\perp.$$

Vi har att $N(A) \subset \mathbb{R}^n$, så dimensionssatsen säger att

$$\dim N(A) + \dim V(A) = n.$$

Från (1) får vi att

$$n = \dim V(A^t) + \dim V(A^t)^\perp = \dim N(A) + \dim V(A^t),$$

så det gäller att

$$\dim V(A^t) = \dim V(A).$$

Definitioner:

$$\text{kolonn-rangen av } A = \dim V(A),$$

$$\text{rad-rangen av } A = \dim V(A^t).$$

Slutsats:

$$\text{kolonn-rang} = \text{rad-rang} = \text{rangen av } A$$

Minsta kvadratmetoden

Betrakta ekvationssystemet

$$Ax = y$$

där A är en $p \times n$ -matris med $p > n$ (överbestämt system).

Minsta kvadratmetoden består nu av två steg:

1. Bestäm den ortogonala projektionen y' på $V(A)$
2. Lös ekvationssystemet $Ax = y'$.

Eftersom $y - y' \in V(A)^\perp$ betyder det att vi ska hitta x sådan att

$$y - Ax \in V(A)^\perp.$$

Men $V(A)^\perp = N(A^t)$, så detta är ekvivalent med att

$$A^t(y - Ax) = 0 \iff A^tAx = A^ty.$$

Ekvationen kallas *normalekvationen*. Lösningen är entydig omm kolonnerna i A är linjärt oberoende.**Exempel** Aminosyran serotonin är inblandad i den känslomässiga stabiliteten hos människor. För att mäta spårämängder av ämnet utvecklades en metod som bygger på hämning av en speciell kemisk process. Vid ett försök fick man följande dos-effekt-samband:

serotonin (ng)	1.2	3.6	12	33
inhibition (%)	19	36	60	84

Bestäm en empirisk funktion som uttrycker effekten som en linjär funktion av $\ln(\text{serotonin})$ och använd denna till att skatta vilken mängd serotonin som resulterar i 50% inhibition.Låt $y = \text{inhibition}$ och $x = \text{mängd serotonin}$. Modellen vi ska ha är då $y = a + b \ln x$ och det överbestämda ekvationssystemet är

$$\begin{cases} a + b \ln 1.2 = 19 \\ a + b \ln 3.6 = 36 \\ a + b \ln 12 = 60 \\ a + b \ln 33 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \ln 1.2 \\ 1 & \ln 3.6 \\ 1 & \ln 12 \\ 1 & \ln 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 36 \\ 60 \\ 84 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu (med hjälp av en räknemaskin) att

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 & 7.4446696 \\ 7.4446696 & 20.074359 \end{pmatrix}, \quad A^t y = \begin{pmatrix} 199 \\ 492.37876 \end{pmatrix}.$$

Det följer att

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t y = \begin{pmatrix} 13.234536 \\ 19.619656 \end{pmatrix}$$

Om vi avrunda lite får vi alltså att den bästa log-linjära approximationen ges av

$$\text{inhibition} = 19.6 \ln(\text{serotonin}) + 13.2$$

Slutligen löser vi

$$50 = 19.6 \ln(\text{serotonin}) + 13.2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{serotonin} = \exp\left(\frac{50 - 13.2}{19.6}\right) = 6.5$$

ng.

Anmärkning När man löser stora system använder man ofta QR-uppdelningen för att effektivisera räkningarna:

$$A = QR.$$

Då gäller att $A^t A = R^t R$, så normalekvationen blir

$$R^t R x = R^t Q^t y \quad \Longleftrightarrow \quad R x = Q^t y.$$

Eftersom R är triangulär är detta lätt löst!