

Innehåll: Euklidiska rum

Kapitel 7.1-7.3

Efter dagens föreläsning måste du

- Kunna definiera vad som menas med en skalärprodukt
- Ge exempel på skalärprodukten för något funktionsrum
- Kunna formulera och härleda Cauchy-Schwartz olikhet och triangelolikheten
- Veta vad som menas med en ortonormerad bas och en ortogonal matris

Skalärprodukt

Definition Med en skalärprodukt i ett lineärt rum V menas en regel som av två vektorer $u, v \in V$ bildar ett tal $(u|v)$ sådant att

$$\begin{cases} (\alpha u + \beta v|w) = \alpha(u|w) + \beta(v|w), \\ (u|v) = (v|u) \\ (u|u) > 0 \text{ då } u \neq 0. \end{cases}$$

Anmärkning Den första räkneregeln innebär att skalärprodukten är en bilinjärform. Den andra att denna är symmetrisk och den sista att den är positivt definit.

Definition Ett euklidiskt rum är ett lineärt rum försett med en skalärprodukt.

Exempel På $V = C[a, b]$ kan vi definiera skalärprodukten

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Man ser lätt att räknereglererna gäller (den sista därför att om $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ och f^2 är kontinuerlig, måste $f(x) = 0$ överallt).

Ytterligare definitioner:

1. $|u| = \sqrt{(u|u)}$ kallas längden av u ,
2. u och v är ortogonala om $(u|v) = 0$.
3. Vinkeln θ mellan u och v definieras genom

$$\cos \theta = \frac{(u|v)}{|u||v|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Omedelbara konsekvenser:

1. Om u, v är ortogonala gäller att $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ (Pythagoras' sats)
2. Om e är en enhetsvektor ($|e| = 1$) och vi sätter

$$u' = (u|e)e, \quad u'' = u - u',$$

så gäller att u' och u'' är ortogonala. u' är den ortogonala projektionen av u på det 1-dimensionella underrummet som har e som bas.

3. Pythagoras sats ger att $|(u|e)| = |u'| \leq |u|$ och sätter vi $e = v/|v|$ följer ur det att

$$|(u|v)| \leq |u||v| \quad \text{Cauchy-Schwarz' olikhet}$$

och från den får vi

4. triangelolikheten

$$|u + v| \leq |u| + |v|.$$

Exempel Som konsekvens får vi följande olikheter för kontinuerliga funktioner:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)$$

och

$$\sqrt{\left(\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt\right)} \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Användbara, men inte helt självklara, olikheter.

Ortonormerade baser

En mängd $\{e_1, \dots, e_n\}$ av vektorer sägs vara en *ortonormerad mängd* om det gäller att

$$(e_j|e_k) = \begin{cases} 0 & \text{då } j \neq k \\ 1 & \text{då } j = k \end{cases}.$$

För en ortonormerad mängd gäller att om

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

så gäller att

$$x_i = (u|e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

En ortonormerad mängd är alltså alltid linjärt oberoende.

Om den dessutom spänner upp det lineära rummet V är den en *ortonormerad bas* i V . Förkortas ofta ON-bas.

Vi kan lätt konstruera en ON-bas utifrån en given bas.

Exempel Låt U vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som genereras av

$$w_1 = (1, 1, 0, 1), \quad w_2 = (3, 1, 1, -1), \quad w_3 = (0, 3, -3, 3).$$

Vi kan då förfara på följande sätt. Vi börjar med att sätta

$$u_1 = w_1.$$

Sedan vill vi ta $u_2 \in [w_1, w_2]$ sådan att $(u_1|u_2) = 0$. Sätt $u_2 = au_1 + w_2$. Då är villkoret att

$$(u_1|u_2) = a(u_1|u_1) + (u_1|w_2) = 3a + 3 = 0,$$

dvs $u_2 = w_2 - w_1 = (2, 0, 1, -2)$. Tag sedan $u_3 = au_1 + bu_2 + w_3$. För den ska gälla att

$$(u_1|u_3) = (u_2|u_3) = 0$$

vilket är ekvivalent med att

$$a(u_1|u_1) + (u_1|w_3) = 0, \quad b(u_2|u_2) + (u_2|w_3) = 0 \implies$$

$$3a + 6 = 0, \quad 9b - 9 = 0. \text{ Det följer att } u_3 = -2u_1 + u_2 + w_3 = (0, 1, -2, 1).$$

Vi har nu hittat en ortogonal bas. För att få den ortonormerad ska vi bara dividera med längderna:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1), \quad e_2 = \frac{1}{3}(2, 0, 1, -2), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1)$$

Metoden i exemplet kan användas generellt. Den kallas *Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod*.

Låt oss ta ett annat exempel.

Exempel På P_3 har vi basen $\{1, x, x^2, x^3\}$. Gör det till ett Euklidiskt rum genom skalärprodukten

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Vi ska nu konstruera en ortogonal bas $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ för att sedan normera den. Vi börjar med att ta $u_0(x) = 1$ för vilken gäller att $|u_0|^2 = 2$. Sätt sedan

$$u_1(x) = au_0(x) + x = a + x.$$

Vi bestämmer a genom

$$(u_0|u_1) = \int_{-1}^1 (a+x)dx = 2a = 0,$$

så vi ska ta $u_1(x) = x$ för vilken gäller att $|u_1|^2 = 2/3$. I nästa steg skriver vi $u_2(x) = au_0(x) + bu_1(x) + x^2$ och ska då ha

$$(u_0|u_2) = a(u_0|u_0) + (u_0|x^2) = 2a + \frac{2}{3} = 0, \quad (u_1|u_2) = b = 0,$$

så $u_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, för vilken vi har $|u_2|^2 = 8/45$. Sista steget är att ta $u_3(x) = au_0(x) + bu_1(x) + cu_2(x) + x^3$. Villkoren är då

$$(u_0|u_3) = 2a = 0, \quad (u_1|u_3) = b\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = 0, \quad (u_2|u_3) = \frac{8c}{45} = 0,$$

så $u_3(x) = -\frac{3x}{5} + x^3 = \frac{1}{5}(5x^3 - 3x)$ för vilken vi har att $|u_3|^2 = 8/175$.

Det följer att vi har följande ON-bas i P_3 :

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1),$$

$$p_3(x) = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x).$$

Anmärkning Avsnitt 7.3 innehåller en mer allmän diskussion om detta. Läs den gärna, men den ingår inte i kursen. Det kan dock vara bra att fundera igenom det som sägs om Fourierserier i det avsnittet - det kommer sedan i kursen i Funktionsteori i åk 2.

Ortogonala matriser

Definition En matris A vars kolonner är en ON-bas kallas en ortogonal matris.

Vi kan uttrycka matrismultiplikation så att $(AB)_{jk}$ fås genom att vi multiplicerar den j :te raden i A skalärt med den k :te kolonnen i B . Speciellt betyder det att

$$A^t A = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1 & A_1 \cdot A_2 & \dots & A_1 \cdot A_n \\ A_2 \cdot A_1 & A_2 \cdot A_2 & \dots & A_2 \cdot A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n \cdot A_1 & A_n \cdot A_2 & \dots & A_n \cdot A_n \end{pmatrix}.$$

Alltså gäller att

$$A \text{ ortogonal} \iff A^t A = E,$$

vilket betyder att $A^{-1} = A^t$ samt att även A^t är ortogonal. Annorlunda uttryckt: utgör kolonnvektorena en ON-bas, så gör även raderna det (och vice versa).

Exempel Matrisen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

är ortogonal (kontrollera), så dess invers ges av

$$A^{-1} = A^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning Vi har att

$$A \text{ inverterbar} \iff \mathbb{R}^n = [A_1, \dots, A_n] = [Q_1, \dots, Q_n]$$

där (Gram-Schmidts ortogonaliseringsförfarande) $Q_1, \dots, Q_n$ är en ON-bas och

$$A_1 = r_{11}Q_1, \quad A_2 = r_{12}Q_1 + r_{22}Q_2, \dots, A_n = \sum_{k=1}^n r_{kn}Q_k.$$

Men detta är ekvivalent med att

$$A = QR$$

där R är en uppåt triangulär matris. Kallas QR-faktoriseringen av A och är viktigt i numeriska sammanhang.

Exempel Vi ska QR-faktorisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar då med att hitta en ortogonal bas. Sätt:

$$w_1 = (-2, 1, 1), \quad w_2 = (0, 3, 3), \quad w_3 = (4, 4, 2).$$

Vi tar då $u_1 = w_1$,

$$u_2 = w_2 - \frac{(u_1|w_2)}{|u_1|^2}u_1 = w_2 - \frac{6}{6}u_1 = (0, 3, 3) - (-2, 1, 1) = (2, 2, 2),$$

$$u_3 = w_3 - \frac{(u_1|w_3)}{|u_1|^2}u_1 - \frac{(u_2|w_3)}{|u_2|^2}u_2 = w_3 - \frac{-6}{6}u_1 - \frac{12}{12}u_2$$

$$= (4, 4, -2) + (-2, 1, 1) - (2, 2, 2) = (0, 3, -3).$$

Det följer att vi har ON-basen

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}u_1, \quad e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}u_2, \quad e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}u_3,$$

och från det får vi att

$$w_1 = \sqrt{6}e_1, \quad w_2 = u_2 + u_1 = \sqrt{6}e_1 + 2\sqrt{3}e_2,$$

$$w_3 = u_3 - u_1 + u_2 = -\sqrt{6}e_1 + 2\sqrt{3}e_2 + 3\sqrt{2}e_3.$$

Från detta får vi nu att

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

och

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$