

Innehåll: Lineära rum

Kapitel 6

Efter dagens föreläsning måste du

- veta vad som menas med linjära rum och underrum
- kunna hantera de allmänna begreppen lineärkombination, lineärt oberoende, lineära höljet, genereras av, bas, koordinater
- kunna dimensionssatsen

Lineära rum

Definition Ett lineärt rum V är en mängd sådan att

1. Om $u, v \in V$, så gäller att $u + v \in V$,
2. Om $u \in V$ och α är ett reellt tal, så gäller att $\alpha u \in V$,
3. Följande räknelagar gäller:

$$\begin{cases} u + v = v + u, & u + (v + w) = (u + v) + w \\ \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, & 1 \cdot u = u, \quad 0 \cdot u = 0, \\ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, & \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v. \end{cases}$$

Elementen kallas vektorer och ofta kallar man ett lineärt rum för ett vektorrum. Räknelagarna kallas *axiomen för lineära rum*

Exempel $\mathbb{R}^n$ är ett lineärt rum**Exempel** Polynomen av grad $\leq n$ definierar ett lineärt rum P_n .

Exempel Mängden av kontinuerliga funktioner på $[a, b]$ kan göras till ett lineärt rum $C[a, b]$ genom att vi definierar addition och multiplikation med skalär punktvis. Kräver analys! 0 är den funktion som tar värdet 0 överallt.

Definition En delmängd U till ett lineärt rum V kallas ett underrum om

$$u \in U, v \in U \implies u + v \in U, \alpha u \in U.$$

Exempel P_n är ett underrum till $C[a, b]$.**Exempel** Betrakta ett ekvationssystem $Ax = y$ där A är en $p \times n$ -matris. Vi har då följande underrum:

1. Lösningarna till den homogena ekvationen $Ax = 0$ utgör ett underrum $N(A)$ till $\mathbb{R}^n$, kallat nollrummet till A .
2. De värden y som kan fås (bildmängden) utgör ett underrum $V(A)$ till $\mathbb{R}^p$, kallat värderummet till A .

Dessa är mycket viktiga i fortsättningen.

Definition Vi säger att u är en linjärkombination av $u_1, \dots, u_n$ om vi kan skriva

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Mängden av sådana utgör det linjära höljet av $u_1, \dots, u_n$ och betecknas

$$U = [u_1, \dots, u_n].$$

 U är ett lineärt rum som genereras av $u_1, \dots, u_n$.**Exempel** Ekvationssystemet $Ax = y$ kan skrivas

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = y,$$

där $A_1, \dots, A_n$ är kolonnerna i A . Det betyder att $V(A)$ genereras av $A_1, \dots, A_n$:

$$V(A) = [A_1, \dots, A_n].$$

Bas och koordinater

Vi har ett antal definitioner som endast är upprepningar (i ett mer generellt sammanhang) av vad vi redan gjort.

Vektorerna $u_1, \dots, u_k$ sägs vara lineärt beroende om det finns $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ och något av dem $\neq 0$ sådana att

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

En bas för ett lineärt rum V är en uppsättning vektorer sådana att

1. de är linjärt oberoende
2. de spänner upp V .

Om $e_1, \dots, e_n$ är en bas för V kan varje vektor i V på precis ett sätt skrivas

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Vi säger att $(x_1, \dots, x_n)$ är u 's koordinater i basen $e_1, \dots, e_n$.*Anmärkning* På detta sätt kan vi identifiera V med $\mathbb{R}^n$.Följande observation är viktig: Antalet element i en bas i ett givet lineärt rum V är alltid detsamma, och detta antal kallas dimensionen av V . Skrivs

$$\dim V.$$

Anmärkning Många av de viktigaste lineära rummen är oändligt-dimensionella. T.ex. $C[a, b]$.

Tänk nu igenom följande sats.

Sats Antag att $\dim V = n$ och att $e_1, \dots, e_n$ är vektorer i V . Då är följande villkor ekvivalenta:

- (i) $e_1, \dots, e_n$ genererar V ,
- (ii) $e_1, \dots, e_n$ är lineärt oberoende,
- (iii) $e_1, \dots, e_n$ är en bas för V .

Exempel Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Av skäl som snart ska framgå tittar vi först närmare på $N(A)$, vilket innebär att vi ska lösa ekvationssystemet $AX = 0$. Gausselimination ger att detta blir

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

Vi löser detta genom att sätta $x_2 = s$ och $x_5 = t$. Vi får då att $x_4 = -2t$, $x_3 = -2t + t = -t$, $x_1 = 2s - 2t$ Annorlunda uttryckt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De två vektorerna i högerledet är linjärt oberoende och är därför en bas för nollrummet $N(A)$. Vi ser att $\dim N(A) = 2$.

Men det betyder också något annat:

$$(2s - 2t)A_1 + sA_2 - tA_3 - 2tA_4 + tA_5 = 0$$

för alla s, t . Om vi tar $s = 1, t = 0$ får vi speciellt att $2A_1 + A_2 = 0$ och alltså $A_2 = -2A_1$ (vilket vi lätt kunde sett från början), och tar vi $s = 0, t = 1$ får vi att $-2A_1 - A_3 - 2A_4 + A_5 = 0$.

Vi ser alltså att A_2 och A_5 är linjärkombinationer av A_1, A_3, A_4 , så från en potentiell bas för $V(A)$ tar vi bort dem. Är de återstående tre linjärt oberoende?

Ja, ty ekvationen $y_1A_1 + y_2A_3 + y_3A_4 = 0$ måste vara en lösning till den ursprungliga ekvationen med $x_1 = y_1, x_2 = 0, x_3 = y_2, x_4 = y_3, x_5 = 0$. Men det betyder att $s = t = 0$ och alltså att $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

En bas för $V(A)$ har alltså tre element, dvs $\dim V(A) = 3$. Vi ser också att

$$\dim V(A) + \dim N(A) = 3 + 2 = 5,$$

en observation vi ska komma ihåg en stund.

Om vi går igenom exemplet så inser vi att det finns ett samband mellan dimensionerna av värde- och nollrum till en matris:

Sats (Dimensionssatsen) Om A är en $p \times n$ -matris gäller att

$$\dim V(A) + \dim N(A) = n.$$

Vi ska återvända till den satsen strax.

Om existensen av inverser till matriser

Följande fyra påståenden är nu ekvivalenta för ett kvadratisk ekvationssystem (A är $n \times n$):

1. $Ax = y$ är entydigt lösbart för varje högerled y ,
2. A är inverterbar,
3. $V(A) = \mathbb{R}^n$,
4. $N(A) = \{0\}$.

Detta kan vi använda till att bevisa följande sats, som säger att för att visa identiteterna $AB = E$, $BA = E$ räcker det med att visa en av dem.

Sats För kvadratiske matriser gäller att

$$AB = E \iff BA = E.$$

Bevis. Det räcker att visa $\implies$, så antag att $AB = E$. Då gäller att

$$x = By \implies Ax = y,$$

alltså är $V(A) = \mathbb{R}^n$ och A inverterbar, där $B = A^{-1}BA = A^{-1}$. $\square$

Dimensionssatsen

Låt A vara en $p \times n$ -matris och definiera funktionen

$$F(x) = Ax$$

som avbildar $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^p$. Den är en linjär avbildning enligt följande definition.

Definition En avbildning $F : U \rightarrow V$ mellan två linjära rum som är sådan att

$$F(u + v) = F(u) + F(v), \quad F(\alpha u) = \alpha F(u)$$

sägs vara en linjär avbildning.

För en linjär avbildning kan vi definiera $N(F)$ och $V(F)$ som tidigare.

Sats (Dimensionssatsen) Om $\dim U = n$ gäller att

$$\dim V(F) + \dim N(F) = n.$$

Bevis. Komplettera en bas $e_1, \dots, e_k$ för $N(F)$ med $e_{k+1}, \dots, e_n$ till en bas i U . Då genereras $V(F)$ av $F(e_{k+1}), \dots, F(e_n)$. Men dessa är linjärt oberoende, ty om

$$0 = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j F(e_j) = F\left(\sum_{j=k+1}^n \lambda_j e_j\right),$$

så måste argumentet i högerledet ligga i $N(F)$, vilket bara är möjligt om alla $\lambda_j = 0$. $\square$

Vi ska prata mycket mer om linjära avbildningar längre fram!

Exempel Vi ska visa att det till godtyckliga olika punkter $x_1, \dots, x_n$ och godtyckliga reella tal $a_1, \dots, a_n$ finns precis ett polynom $p(x)$ av grad högst $n - 1$ sådant att $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

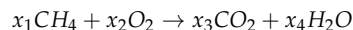
För detta definierar vi den linjära avbildningen $F : P_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ genom $F(p) = (p(x_1), \dots, p(x_n))$. Dess nollrum består då av de polynom som är sådana att $p(x_i) = 0$ för $i = 1, \dots, n$, och enligt faktorsatsen kan ett polynom av grad $n - 1$ inte ha n olika nollställen om det inte är nollpolynomet. Men

$$\dim P_{n-1} = n,$$

så dimensionssatsen visar att $V(F) = \mathbb{R}^n$.

Ett kemi-exempel

Finns det någon reaktion som oxiderar metan (CH_4) till koldioxid (CO_2) och vatten (H_2O)? Att oxideras innebär att metanet ska reagera med syrgas (O_2). Vi söker alltså en ekvation av typen



där x_i :na är heltal.

För att ta reda på detta måste vi ha massbalans i den meningen att reaktionen har lika många C, H, O -atomer före som efter. Det innebär att vi måste ha följande samband:

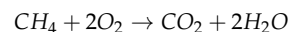
$$\begin{cases} C & x_1 = x_3 \\ H & 4x_1 = 2x_4 \\ O & 2x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases}.$$

Vi kan skriva detta som matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Lägg märke till minutecknens placering! Vi sätter minustecken på de molekyler som finns till vänster om reaktionspilen. Kolonnerna i matrisen representerar den kemiska formeln för varje molekyl i sina beståndsdelar (C, H, O). T.ex. innebär första kolonnen ämnet $C_1H_4O_0 = CH_4$.

Eftersom vi har tre ekvationer men fyra obekanta vet vi att det finns lösningar på detta problem (dimensionssatsen sa ju nämligen att $\dim V(A) + \dim N(A) = 4$ i detta fall, och $\dim V(A) \leq 3$, så $\dim N(A) \geq 1$). En kort räkning visar att $Av = 0 \iff v = t(-1, -2, 1, 2)$, så vi har faktiskt $\dim N(A) = 1$. Dessutom ser vi att $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ och $x_4 = 2$. Vi har alltså identifierat reaktionen



Metoden ovan visar bara hur bevarandet av atomer i en reaktion återspeglar sig i linjär algebra, och nedan är en frivillig övning på detta för den intresserade:

Övning I en process för framställning av ättiksyreanhydrid, $(CH_3CO)_2O$, utgår man ifrån aceton, $(CH_3)_2CO$, och ättiksyra, $C_2H_4O_2$. Som mellan produkter och biprodukter förekommer keten, CH_2CO , metan, kolmonoxid, CO , och vätgas, H_2 .

Kan du ge ett förslag på oberoende reaktioner för processen?

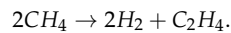
Tricket här är att ställa upp en 3×8 -matrix vars nollrum ger lösningarna. Kan du förklara följande förslag:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}?$$

Nollrummet har dimension $8 - 3 = 5$ och en bas ges t.ex. av kolonnerna i matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Varje rad är en komponent och ordningen mellan komponenterna är densamma som komponenterna i den ursprungliga matrisen. Första kolonnen svarar t.ex. mot reaktionen



Bestäm de övriga.