

Innehåll: Matriser

Kapitel 5.1–5.2

Efter dagens föreläsning måste du

- veta vad transponatet till en matris är
- kunna bestämma rangen av en matris och en bas för dess nollrum
- kunna innebörden av huvudsatsen för kvadratiske matriser
- veta vad en invers matris är och kunna beräkna den genom att lösa ett ekvationssystem

Matriser

Ett allmänt linjärt ekvationssystem om p ekvationer i n variabler kan skrivas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = y_p \end{cases}$$

Om vi inför vektorerna $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, p$ så har vi alltså

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = y$$

där $y = (y_1, \dots, y_p)$.

Vi kan driva beteckningarna ovan lite längre genom att skriva

$$A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Då kan nämligen ekvationssystem kompaktare skrivas

$$Ax = y$$

om vi definierar multiplikationen Ay som ovan.

Allmänare kallas rektangulära scheman på formen ovan för matriser och vi pratar om element, rader och kolonner i en matris. Räk-neregler

- Om λ är ett tal, står λA för den matris i vilken alla A 's element har multiplicerats med λ
- Två matriser kan adderas genom att man adderar elementen om de har lika många rader och kolonner
- Två matriser multipliceras på ett sätt som kan beskrivas på följande sätt. Om A är $1 \times n$ -matrisen $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$ och X är $n \times 1$ -matrisen ovan, så gäller att

$$Ax = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

(som alltså är ett tal!) Vi får nu elementet på plats (j, k) i en produkt AB genom att på detta sätt multiplicera rad j i A med kolonn k i B .

Exempel Kontrollera att

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$$

Anmärkning Vi kan multiplicera två matriser om de passar ihop rad och kolonnmässigt - hur? Vad blir resultatet för typ av matris? Ibland kan vi därför bilda AB men inte BA , och när vi kan bilda båda (när är det?) så är det vanligtvis så att

$$BA \neq AB.$$

Transponatet av en matris

Transponatet till en matris får man genom att byta raderna mot kolonner. En $m \times n$ -matris blir då en $n \times m$ -matris. För en kvadratisk matris innebär det spegling i diagonalen.

Exempel Vi har att

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Formler:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$. (Notera ordningen - jämför med invers nedan).

Följer direkt ur definition, utom möjligen den sista: elementet på plats (j, k) i $(AB)^t$ = elementet på plats (k, j) i $AB = (\text{rad } k \text{ i } A)(\text{kolonn } j \text{ i } B) = (\text{rad } j \text{ i } B^t)(\text{kolonn } k \text{ i } A^t)$.

Invers matris

Antag att A är kvadratisk och att ekvationen $AX = Y$ är entydigt lösbar för alla Y . Vi kan då lösa detta genom Gausselimination:

Exempel

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + x_3 = y_1 \\ 3x_2 + 2x_3 = y_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5y_1 + 6y_2 - 7y_3 \\ x_2 = -4y_1 + 5y_2 - 6y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 7y_2 + 9y_3 \end{cases}.$$

Det vänstra ekvationssystemet kan skrivas $Ax = y$ och det högra $x = By$ där

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 \\ -4 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

Jag påstår nu att vi måste ha

$$AB = BA = E$$

där E är matrisen med ettor på diagonalen och nollor för övrigt, som har egenskapen att $AE = EA = A$.

Vi har nämligen att $x = By$ löser ekvationssystemet, vilket betyder att $y = Ax = A(By) = (AB)y$. Detta är sant för alla y och därför måste $AB = I$. Men vi har också att $y = Ax$ löser ekvationssystemet $By = x$ vilket betyder att $x = By = B(Ax) = (BA)x$ och det följer att $BA = E$.

Motiverade av exemplet gör vi nu följande

Definition Låt A vara en kvadratisk matris. Om det finns en matris B sådan att

$$AB = E \quad \text{och} \quad BA = E,$$

säger man att A är inverterbar med inversen B .

Det finns *högst* en invers, ty om både B och C vore inverser har vi

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

När den finns betecknar vi inversen till A med A^{-1} .

Sats Det gäller att

$$A \text{ är inverterbar} \iff Ax = y \text{ har entydig lösning för alla } y.$$

Lösningen ges då av $x = A^{-1}y$.

Anmärkning Jämför med den enkla ekvationen $ax = y$ där a, x, y alla är tal. Dess lösning är $x = a^{-1}y = y/a$ förutsatt att $a \neq 0$. Ekvationen går alltså endast att lösa entydigt för alla högerled om $a \neq 0$, vilket svarar mot att matrisen är inverterbar.

Bevis. Att $x = A^{-1}x$ är en entydig lösning då A är inverterbar är ren instoppning.

Antag att $Ax = y$ har en entydig lösning för varje y . Då finns precis ett B sådant att $AB = E$ (n ekvationer med kolonnerna i E som högerled). Då gäller att $A(BA) = (AB)A = EA = A$, och då måste $BA = E$ eftersom ekvationen $AC = A$ enligt antagandet har en entydig lösning. $\square$

Vi avslutar med några formler: Antag att matriserna A, B båda är inverterbara. Då gäller att

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dessa lagar följer direkt ur definitionen av invers. T.ex. innebär $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ att A är invers till A^{-1} och vi har t.ex. att $(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = E^t = E$ och att $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}EB = E$.