

Innehåll: Vektorprodukt och determinanter

Kapitel 4.1-4.4, (4.3 kursivt)

Efter dagens föreläsning måste du

- Kunna definiera och räkna ut vektorprodukten av två vektorer i rummet
- Beräkna volymprodukten och veta vad en 3×3 -determinant är

Arean av ett parallelogram

Vad är arean av det parallelogram som bestäms av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$?

Arean är höjden gånger basen, alltså $A = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$. För att beräkna det påminner vi oss först att, med $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$,

$$|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Kvadrera och räkna lite:

$$A^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 =$$

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 = x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\ = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2.$$

Det betyder att

$$A = \pm(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

där tecknet ska väljas så att uttrycket blir positivt.

En behändig beteckning är

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

som kallas en determinant (determinanten av en speciell matris visserligen, men det återkommer vi till). Den anger alltså arean av parallelogrammet *räknat med tecken*. Just nu bryr vi oss inte om när den blir positiv och när den blir negativ, utan bara att absolutbeloppet av svaret på frågan vad arean är.

Exempel Bestäm arean för triangeln som har hörn i punkterna $P_0 = (1, 3)$, $P_1 = (4, 1)$, $P_2 = (2, 2)$.

Denna area är hälften av arean av det parallelogram som spänns upp av $\vec{P_0 P_1} = (4, 1) - (1, 3) = (3, -2)$ och $\vec{P_0 P_2} = (2, 2) - (1, 3) = (1, -1)$. Räknat med tecken har detta parallelogram arean

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 1(-2) = -1.$$

Arean av parallelogrammet är alltså $|-1| = 1$ och triangelns area därför $1/2$.

Men arean är noll precis om det inte blir ett parallelogram, dvs om kolonnvektorer är linjärt beroende. Med andra ord (A är en 2×2 -matris)

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A\text{'s kolonnvektorer är linjärt oberoende.}$$

Vektorprodukten av två vektorer

Två vektorer i rummet spänner också upp ett parallelogram. Vad kan vi säga om dess area? Delar av ovanstående gäller ännu, så till vida att den ges av $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$. Hur ska vi räkna ut den? Om vi genomför räkningarna ovan får vi ett till synes komplicerat uttryck. Vi splittrar upp resonemanget i några steg för att genomskåda det.

Två icke-parallella vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i rummet spänner upp ett plan. Till detta plan kan vi välja två normaler som har en längd som är lika stor som arean av det parallelogram de spänner upp i planet (tänk igenom!). För att välja en av dessa, så att två vektorer i rummet på ett entydigt sätt definierar en tredje vektor enligt detta, så tar vi den vektor $\vec{w}$ som är sådan att trippeln $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bildar ett positivt orienterat system. Den härigenom definierade vektorn kallar vi *vektorprodukten* av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ och vi betecknar den $\vec{u} \times \vec{v}$.

Anmärkning Vektorprodukten är en väldigt tredimensionell storhet. Det finns ingen vektorprodukt i planet eller i några andra dimensioner (nästan).

Anmärkning Vektorerna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är positivt orienterade om det är så att den minsta vridning som överför $\vec{u}$ på $\vec{v}$ (samma riktning) sker moturs sett från spetsen av $\vec{w}$.

Följande karakteriserar nu vektorprodukten:

1. $\vec{u} \times \vec{v}$ är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$,
2. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$
3. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ utgör ett positivt orienterat system (obs ordningen)

Anmärkning Egentligen har vi först bara definierat vektorprodukten för icke-parallella vektorer, men om vi sätter den till 0 när vektorerna är parallella, så fungerar definitionen även då.

Räknelagar och koordinatframställning

Följande räkneregler gäller för vektorprodukten:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ är parallella,
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \times \vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{v} + \vec{u}_2 \times \vec{v}$
4. en motsvarande i det andra argumentet
5. $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{v} \times (\lambda \vec{u}) = \lambda \vec{u} \times \vec{v}$

Den enda av dessa räkneregler som inte är självklar från beskrivningen ovan är den tredje (den fjärde följer sedan ur den tredje och den andra tillsammans). Läs själva i boken.

Exempel En ortonormerad bas är positivt orienterad om

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1.$$

(Kan du hitta symmetrin?) Notera speciellt att

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0.$$

Antag nu att vi har givet en positivt orienterad, ortonormerad bas. Då kan vi skriva

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \times (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3) =$$

$$x_1 y_1 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + x_2 y_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + x_3 y_3 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 + x_1 y_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + x_1 y_3 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 +$$

$$x_2 y_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + x_2 y_1 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + x_3 y_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + x_3 y_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 =$$

$$0 + 0 + 0 + x_1 y_2 \vec{e}_3 + x_1 y_3 (-\vec{e}_2) + x_2 y_3 (-\vec{e}_1) + x_2 y_1 \vec{e}_3 + x_3 y_1 \vec{e}_2 + x_3 y_2 (-\vec{e}_1)$$

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_3.$$

Med andra ord

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

En minnesregel för detta är att se det som determinanter, dvs vektorprodukten är

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Observera minustecknet! Även denna minnesregel kan verka lite konstig, men ha tålamod.

Exempel Beräkna arean av triangeln med hörn i $P_0 = (3, 0, 1)$, $P_1 = (5, 3, 0)$, $P_2 = (7, 1, -2)$.

Vi vet att triangelns area är hälften av arean av det parallelogram som spänns upp av vektorerna $\vec{P_0P_1} = (5, 3, 0) - (3, 0, 1) = (2, 3, -1)$ och $\vec{P_0P_2} = (7, 1, -2) - (3, 0, 1) = (4, 1, -3)$. För att få arean av parallelogrammet beräknar vi längden på vektorprodukten av dessa två vektorer:

$$|(2, 3, -1) \times (4, 1, -3)| = |(-8, 2, -10)| = \sqrt{168} = 2\sqrt{42}.$$

Eftersom triangelarean är hälften av detta är svaret $\sqrt{42}$.

Volymprodukten

Antag nu att vi tar en vektor $\vec{w} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3$ och multiplicerar vektorprodukten skalärt med den. Då får vi

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Men trippelprodukten har en tolkning: Om vi skriver $\vec{w} = \vec{w}' + \vec{w}''$ där $\vec{w}'$ är parallell med $\vec{u} \times \vec{v}$ och $\vec{w}''$ är ortogonal mot den, så gäller att

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}' = \pm |\vec{u} \times \vec{v}| |\vec{w}'| = \pm \text{basarea} \cdot \text{höjd}$$

av den parallelepiped som bestäms av vektorerna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Uttrycket är därför volymen av denna parallelepiped, räknat med tecken. Uttrycket blir positivt när $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är positivt orienterade, annars negativt. Ur det följer också att (tänk efter!!!)

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Determinanter

Om vi tar tre vektorer i rummet $A_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $A_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $A_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ och ställer de som ett rektangulärt schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3)$$

så får vi något som kallas en matris A . Till denna inför vi *determinanten* av matrisen A som

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_1 \cdot (A_2 \times A_3).$$

Det finns en minnesregel för hur den beräknas (Sarrus regel, se boken), men det är lika enkelt att använda resonemanget ovan till att få följande rekursiva formel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Detta kallas utveckling efter första kolonnen och reducerar en 3×3 -determinant till 3 stycken 2×2 -determinanter.

Exempel Bestäm en ekvation för planet M som innehåller vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, 3, 4)$ samt punkten $P_0 = (1, 1, 8)$ (vi förutsätter ett positivt orienterat ON-system).

Observationen vi ska göra är att en punkt $P = (x, y, z)$ ligger i planet π om och endast om vektorerna $\vec{P_0P} = (x-1, y-1, z-8)$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ är linjärt beroende, vilket de är precis då

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z-8 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (z-8) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11x - 4y + 3z - 16 = 0.$$

Normalformen för M är alltså $11x - 4y + 3z - 16 = 0$.

Exempel Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, -1)$, $P_2 = (2, 1, 0)$, $P_3 = (1, 1, 2)$.

Vi har att

Volymen av en tetraeder = $\frac{1}{3}$ basarea $\cdot$ höjd = $\frac{1}{6}$ volymen av parallelepiped

Volymen av motsvarande parallelepiped ges enligt ovan av

$$\det(\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}, \vec{P_0P_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

varur det följer att tetraederns volym är $1/6$.

Tolkningen av determinanten är alltså som volymen med tecken av det parallelepiped som spänns upp kolonnvektorerna i motsvarande matris. Tecknet är positivt om dessa är positivt orienterade, annars negativt. Detta betyder att vi ser att följande räkneregler gäller:

$$\det(A_1 \ A_2 \ A_3) = -\det(A_2 \ A_1 \ A_3).$$

Varför? Kan du tänka ut några andra, liknande räkneregler? Vad sägs om

$$\det(A_1 + A'_1 \ A_2 \ A_3) = \det(A_1 \ A_2 \ A_3) + \det(A'_1 \ A_2 \ A_3)?$$