

Innehåll: Skalarprodukten

Kapitel 2.4, 3.1-3.3, (3.4-3.5 kursivt)

Efter dagens föreläsning måste du veta

- Kunna beskriva plan och linjer i rummet på olika sätt
- Veta vad en skalärprodukt är för något
- Kunna beräkna avstånd och vinklar

Geometriskt innehåll av system i tre variabler

En ekvation $ax + by + cz + d = 0$ definierar en delmängd M av R^3 . Hur kan vi beskriva den?

Exempel Ekvationen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ innebär att vi kan låta två variabler variera godtyckligt, t.ex. $x_2 = s$, $x_3 = t$. Detta ger $x_1 = 1 - 2s - t$, vilket vi kan skriva som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att om (x_1, x_2, x_3) ligger i M så kan vektorn $(x_1 - 1, x_2, x_3)$ skrivas som en linjärkombination av $\vec{u}_1 = (-2, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$. Dessa är linjärt oberoende (kontrollera) så vi inser att M är ett plan genom punkten $P = (1, 0, 0)$:

I terminologin från F1 gäller att ett koordinatsystem på M ges av $P\vec{u}_1\vec{u}_2$ med koordinaterna (s, t) .

Anmärkning Beskrivningen

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$$

kallas planets ekvation på parameterform. Parametrarna är s, t , vilka är två. Detta svarar mot att planet är 2-dimensionellt.

En stunds eftertanke ger att varje ekvation $ax + by + cz + d = 0$ definierar ett plan i rummet om bara $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exempel Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $P = (-1, 0, 2)$, $Q = (1, 3, 3)$, $R = (-2, 1, 3)$.

Det är enklast att bestämma ekvationen på parameterform. Som koordinatsystem kan vi då ta $P\vec{u}\vec{v}$ där $\vec{u} = \vec{PQ} = (1, 3, 3) - (-1, 0, 2) = (2, 3, 1)$, $\vec{v} = \vec{PR} = (-2, 1, 3) - (-1, 0, 2) = (-1, 1, 1)$. Planets ekvation på parameterform blir alltså

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + s(2, 3, 1) + t(-1, 0, 2).$$

Detta plan kan också skrivas på normalformen $ax + by + cz + d = 0$. Hur gör vi det? Vi skriver om parameterformen som ett system i (s, t) och löser det:

$$\begin{cases} 2s - t = x + 1 \\ 3s + t = y \\ s + t = z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s - t = x + 1 \\ 5t = -3x + 2y - 3 \\ 0 = -4x + 6y - 10z + 16 \end{cases}$$

Från detta kan vi utläsa att planets normalform är

$$2x - 3y + 5z - 8 = 0.$$

Anmärkning I kommande föreläsningar kommer vi att lära oss alternativa sätt att lösa detta problem som nog ofta är räknemässigt lite enklare. Men då måste vi lära oss mer linjär algebra först.

Vad är då skärningen av två plan?

Exempel Skärningen av planen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ och $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$ består av alla (x_1, x_2, x_3) som uppfyller båda ekvationerna samtidigt:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$$

Här kan en variabel variera fritt. Om vi sätter $x_3 = t$ får vi att lösningen ges av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 7t \\ 1 - 4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att lösningen är en rät linje genom $P = (-1, 1, 0)$ och riktningsvektorn $\vec{u} = (7, -4, 1)$. Ett koordinatsystem på denna linje är $P\vec{u}$.

Ger skärningen av två plan *alltid* en rät linje?

Vad är skärningen av tre plan? Vilka alternativ finns?

Exempel Följande ekvationssystem beskriver skärningen av tre plan:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

ett system som har som lösningen den räta linjen i föregående exempel. Hur ser detta ut?

Skalärprodukten av två geometriska vektorer

Skalärprodukt = produkt som ger en skalär (dvs ett tal!)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta.$$

Geometrisk tolkning: Låt $\vec{v} = \vec{e}$ vara en enhetsvektor (dvs $|\vec{e}| = 1$). Låt L vara den räta linjen genom origo som har riktningsvektor $\vec{e}$ och låt $\vec{u}'$ vara den ortogonal projektionen av $\vec{u}$ på L :

Då gäller att

$$\vec{u}' = (|\vec{u}| \cos \theta) \vec{e} = (\vec{u} \cdot \vec{e}) \vec{e}.$$

Tolkning i fysiken: kraften i rörelsens riktning gånger sträcka = arbete.

Anmärkning ortogonal = vinkelrät!

Vi säger att två vektorer är ortogonala om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ och skriver $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Räkneregler för skalärprodukt:

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Den första och tredje formeln är lätt bevisade från definitionen. Den andra kräver att man tänker på skalärprodukten som direkt härledd ur $\vec{u}$ geometriskt (se boken).

Exempel Låt $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $\theta = \pi/6$. Bestäm $|\vec{u} + \vec{v}|$!

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$|\vec{u}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \frac{\pi}{6} + 4^2 = 25 + 12\sqrt{3},$$

så vi får alltså att $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Ortonormerade baser

En bas $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sägs vara en ortonormerad bas (ON-bas) om

- alla vektorerna är normerade så att de har längden 1
- alla vektorerna är parvis ortogonala, dvs $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$, $j \neq i$.

I en ON-bas blir skalärprodukten enkel att räkna ut: om $\vec{u} = \sum_i x_i \vec{e}_i$ och $\vec{v} = \sum_i y_i \vec{e}_i$ så gäller att

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) \cdot (y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n)$$

består dels av n termer på formen $x_i y_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = x_i y_i |\vec{e}_i|^2 = x_i y_i$, dels av ett antal termer på formen $x_i y_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = x_i y_j \cdot 0 = 0$. Vi ser alltså att

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

På samma sätt definierar vi skalärprodukten i R^n :

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Exempel

$$(1, 2, -1, 0, -1) \cdot (3, 1, 3, 4, 2) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = 0.$$

Det betyder att vektorerna är ortogonala.

Exempel I en ortonormerad bas gäller att $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Vidare, om $x, y \in R^n$ är ortogonala gäller att

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Ett ortonormerat koordinatsystem är ett där basvektorerna utgör en ortonormerad bas.

Geometrisk tillämpning av skalärprodukten

I det här avsnittet beskrivs alla punkter med sina koordinater i ett ON-system.

Planets normalform

Vi har tidigare sett att ett plan i rummet kan skrivas

$$M: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Om vi tar en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i M , som alltså uppfyller $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, så ser vi att (x, y, z) ligger i M precis då

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Det betyder att vektorn $\vec{u} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ är ortogonal mot vektorn $\vec{n} = (A, B, C)$. Vi kan därför beskriva M som det plan som är vinkelrät mot $\vec{n}$ och går genom punkten P_0 . Formen $Ax + By + Cz + D = 0$ kallas därför planets normalform.

Exempel Bestäm en ekvation för det plan M som går genom punkten $P = (2, 1, 2)$ och har normalvektorn $\vec{n} = (-1, 7, 3)$.

Enligt diskussionen ovan ges M av ekvationen

$$(-1, 7, 3) \cdot (x - 2, y - 1, z - 2) = 0 \Leftrightarrow -x + 7y + 3z - 11 = 0.$$

Exempel Bestäm vinkeln mellan planen

$$M_1: 4x + y + z = 0 \quad \text{och} \quad M_2: 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

Vi börjar med att observera att vinkeln mellan planen är samma som vinkeln mellan normalerna $\vec{n}_1 = (4, 1, 1)$ och $\vec{n}_2 = (2, 2, -1)$.

För att bestämma vinkeln mellan två vektorer använder vi skalärprodukten. Vi börjar med att räkna ut

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (4, 1, 1) \cdot (2, 2, -1) = 9,$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Vi får då

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| |\vec{n}_2| \cos \theta \Leftrightarrow 3\sqrt{2} \cdot 3 \cos \theta = 9 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Eftersom vinkeln ska ligga mellan 0 och π följer att $\theta = \pi/4$.

Orthogonal projektion på linje och plan

Vi ska nu se på några problem som har följande gemensamt. Given en vektor $\vec{u}$ vill vi dela upp den som en summa $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ där $\vec{u}' \perp \vec{u}''$ och vektorn $\vec{u}'$ är en orthogonal projektion på något. Det betyder att $\vec{u}'$ ger den punkt som ligger närmast den punkt som ges av vektorn $\vec{u}$ på detta något. Något ska vara antingen en linje eller ett plan här.

Exempel Dela upp vektorn $\vec{u} = (0, -1, 3)$ i komponenter sådana att $\vec{u}'$ är den ortogonala projektionen på linjen genom origo med riktningsvektor $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

För att bestämma $\vec{u}'$ går vi tillbaka till den geometriska tolkningen av skalärprodukt. Då ser vi att $\vec{u}' = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} / |\vec{v}|^2$, där $\vec{v} = \vec{v} / |\vec{v}| = (2, 1, 1) / \sqrt{6}$. Det följer att

$$\vec{u}' = ((0, -1, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)) \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1) = \frac{1}{3}(2, 1, 1).$$

Den andra komponenten beräknar vi nu genom subtraktion:

$$\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}' = (0, -1, 3) - \frac{1}{3}(2, 1, 1) = \frac{1}{3}(-2, -4, 8).$$

Exempel Bestäm (minsta) avstånd från $P = (1, 2, 1)$ till linjen $L: (x, y, z) = (-2, 1, 1) + t(2, -2, 1)$.

Detta är nästan samma problem som föregående: vi behöver bara välja en punkt P_0 på linjen för att föra över problemet på ett vektorproblem av typen ovan. För det tar vi $P_0 = (-2, 1, 1)$, som ska fungera som origo. Sätter vi $\vec{u} = (1, 2, 1) - (-2, 1, 1) = (3, 1, 0)$ ska vi projicera den på den linje genom P_0 (som är origo) som har riktningsvektor $\vec{v} = (2, -2, 1)$. Vi får då p.s.s. som ovan att

$$\vec{u}' = \frac{4}{9}(2, -2, 1).$$

Men det vi söker är längden på vektorn $\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}'$:

$$|\vec{u} - \vec{u}'| = |(3, 1, 0) - \frac{4}{9}(2, -2, 1)| = |\frac{1}{9}(19, 17, -4)| = \frac{\sqrt{74}}{3}.$$

Detta är därför det sökta avståndet.

Exempel Givet en punkt $P = (2, -3, 1)$ och ett plan $M: -3x + 2y - z + 1 = 0$, bestäm den punkt i planet som ligger närmast punkten P samt hur nära den ligger (dvs avståndet från punkten till planet).

Vi börjar med att välja ett origo lämpligt, vilken är en punkt i planet. Vi kan ta vilken som helst, men väljer $P_0 = (0, 0, 1)$. En normalvektor till planet är $(-3, 2, -1)$, och en med längd ett är därför $\vec{n} = (-3, 2, -1) / \sqrt{14}$. Vi beräknar nu den ortogonala projektionen av $\vec{u} = (2, -3, 1) - (0, 0, 1) = (2, -3, 2)$ på linjen med riktningsvektor $\vec{n}$:

$$\vec{u}' = (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} = -\frac{6}{7}(-3, 2, -1).$$

För att få projektionen ska vi nu gå ner från P enligt $\vec{u}'$:

$$(2, -3, 1) - \vec{u}' = (2, -3, 1) + \frac{6}{7}(-3, 2, -1) = \frac{1}{7}(-4, -9, 1).$$

Detta är alltså den punkt som ligger närmast P i planet. Annorlunda uttryckt, den är den ortogonala projektionen av P på planet M .

Avståndet ifråga är helt enkelt

$$|\vec{u}'| = \frac{6}{7} \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{6\sqrt{14}}{7} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

Anmärkning Om vi tittar efter hur avståndet beräknas ovan ser vi att vi kan generalisera till att beräkna avståndet från en punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ till ett plan $M : Ax + By + Cz + D = 0$ genom formeln

$$d = |\vec{u} \cdot \vec{n}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

som kallas avståndsformeln. Vi gör bara som ovan: nu är $\vec{n} = (A, B, C) / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ och $\vec{u}$ vektorn från en punkt i planet till P . Tänk ut hur D uppkommer i formeln!