

Innehåll: Determinanter

Kapitel 8 (8.2, 8.3 kursivt)

Efter dagens föreläsning måste du

- Beräkna determinanter av olika dimensioner
- Kunna dess viktigaste egenskaper för matriser

Lite repetition

Vi har sett att arean, räknad med tecken, av ett parallelogram i planet som definieras av vektorerna (a_{11}, a_{21}) och (a_{12}, a_{22}) ges av

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Uttrycket till vänster kallas *determinanten av matrisen A*. Betecknas det A .

Men arean är noll precis om det inte blir ett parallelogram, dvs om kolonnvektorerna är linjärt beroende. Med andra ord (A är en 2×2 -matris)

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A\text{'s kolonnvektorer är linjärt oberoende.}$$

I rummet har vi sett att

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_1 \cdot (A_2 \times A_3).$$

Tolkningen av determinanten är alltså som volymen med tecken av det parallelepiped som spänns upp kolonnvektorerna i motsvarande matris. Tecknet är positivt om dessa är positivt orienterade, annars negativt. Detta betyder att vi ser att följande räkneregler gäller:

$$\det(A_1 \ A_2 \ A_3) = -\det(A_2 \ A_1 \ A_3).$$

Följande påstående är nu självklart för 3×3 -determinanter:

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ är inverterbar,}$$

eftersom determinanten är noll precis då A 's kolonnvektorer är linjärt beroende.

Vi har också sett att man kan beräkna determinanten på följande sätt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Detta kallas utveckling efter första kolonnen och reducerar en 3×3 -determinant till 3 stycken 2×2 -determinanter.

Exempel Bestäm en ekvation för planet M som innehåller vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, 3, 4)$ samt punkten $P_0 = (1, 1, 8)$ (ON-system).

Observationen vi ska göra är att en punkt $P = (x, y, z)$ ligger i planet M om och endast om vektorerna $\vec{P_0P} = (x-1, y-1, z-8)$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ är linjärt beroende, vilket de är precis då

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z-8 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (z-8) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 11x - 4y + 3z - 16 = 0.$$

Ekvationsformen för M är alltså $11x - 4y + 3z - 16 = 0$.

Determinanten och dess beräkning

Låt A vara en $n \times n$ -matris med kolonnvektorer $A_1, \dots, A_n$. Vi ska då definiera determinanten av A ,

$$\det A = \det(A_1, \dots, A_n)$$

så att den får följande räknelagar

- (I) Den är multilinjär, dvs linjär på varje kolonn.
- (II) $\det A = 0$ om två kolonner är lika
- (III) $\det E = 1$.

Anmärkning En direkt konsekvens av (I) och (II) är att om kolonnerna i matrisen är linjärt beroende så är determinanten noll.

När man ska räkna med determinanter är följande två observationer som följer direkt av villkoren (I)–(III) av stor betydelse:

- (IV) Determinanten byter tecken om två kolonner byter plats.
- (V) Determinanten ändras inte om man lägger en multipel av en kolonn till en annan kolonn

Tänk efter att du kan härleda dessa!

Exempel Låt A vara en 2×2 -matris, så att

$$A_1 = a_{11}E_1 + a_{21}E_2, \quad A_2 = a_{12}E_1 + a_{22}E_2.$$

Räkneregler (I) och (II) ger oss då att

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det(E_1, A_2) + a_{21} \det(E_2, A_2) \\ &= a_{11}a_{21} \det(E_1, E_1) + a_{11}a_{22} \det(E_1, E_2) + a_{21}a_{12} \det(E_2, E_1) \\ &\quad + a_{21}a_{22} \det(E_2, E_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \det E. \end{aligned}$$

Här har vi använt att

$$\det(E_1, E_1) = \det(E_2, E_2) = 0, \quad \det(E_2, E_1) = -\det(E_1, E_2).$$

Gör vi samma räkning för en 3×3 -matris får vi Sarrus regel för hur man beräknar determinanten.

Om vi utför motsvarande räkning på en $n \times n$ -matris, ser vi att om $D(A)$ uppfyller (I) och (II) får vi en summa av termer på formen

$$a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n} D(E_{j_1}, \dots, E_{j_n})$$

och vi har att $D(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) = \pm D(E)$. Summan ifråga definierar $\det A$, så $D(A) = (\det A) D(E)$. Det följer direkt att

Sats Man kan (för varje n) på precis ett sätt definiera determinanten så att villkoren (I)–(III) är uppfyllda.

Anmärkning Beviset utgör avsnitten 8.2 och 8.3. Är att betrakta som kursivt. Konstruktionen ovan ger en formel som vi kan skriva ut explicit, men vår ansats till determinanter är att det är räkneregler som ska användas när vi beräknar den, inte denna formel (undantag: 2- och ev. 3-dimensioner).

Men det stora hjälpmedlet är följande sats (som boken använder till att definiera determinanten rekursivt för olika n)

Sats (Utveckling efter rad j) Låt $A^{(jk)}$ beteckna den matris av ordning $n-1$ som man får om man stryker rad j och kolonn k i $n \times n$ -matrisen A . Då gäller att

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \det A^{(jk)}.$$

Exempel

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = -1.$$

Eftersom den är skild från noll kan vi dra slutsatsen att vektorerna $(2, 1, 3, -1)$, $(1, 3, 2, 1)$, $(0, 4, -1, 2)$, $(1, 1, 2, 0)$ i R^4 är linjärt oberoende och alltså bildar en bas för R^4 .

Vidare har vi att (se boken för bevis)

$$\det A^t = \det A$$

vilket gör att det finns en motsvarande formel för utveckling efter kolonn k .

Exempel Även vektorerna $(2, 1, 0, 1)$, $(1, 3, 4, 1)$, $(3, 2, -1, 2)$, $(-1, 1, 2, 0)$ i R^4 är linjärt oberoende och alltså bildar en bas för R^4

Exempel Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 27, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & \\ 1 & 1 & x & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}.$$

Produktregeln och Cramers regel

Sats (Produktsatsen) Vi har att

$$\det(BA) = (\det B)(\det A)$$

Bevis. $D(A) = \det(BA)$ uppfyller (I) och (II), så $D(A) = (\det A)D(E) = (\det A)(\det B)$. $\square$

Sats Vi har att

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ är inverterbar}$$

och då gäller att

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Bevis. Antag först A inverterbar. Då följer att $\det A \neq 0$ och formeln från produktformeln.

Om A inte är inverterbar så är $A_1, \dots, A_n$ linjärt beroende och därmed $\det A = 0$. $\square$

Vi har också en formel för lösningen på $Ax = y$. Då gäller att (y insatt istället för A_j)

$$\det(A_1, \dots, y, \dots, A_n) = \sum_{k=1}^n x_k \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) = x_j \det A,$$

vilket ger lösningen (Cramers regel)

$$x_j = \frac{\det(A_1, \dots, y, \dots, A_n)}{\det A}.$$

Den är mer av teoretiskt intresse än räknetekniskt: räkningarna blir ofta längre om man använder den istället för metoderna ovan.

Huvudsatsen

Vi kan sammanfatta en del viktig teori för linjära ekvationssystem i den s.k. huvudsatsen:

Sats (Huvudsatsen) För en kvadratisk matris är följande villkor ekvivalenta:

1. A 's kolonner utgör en bas,
2. A 's rader utgör en bas,
3. ekvationssystemet $Ax = 0$ har endast den triviala lösningen $x = 0$,
4. ekvationssystemet $Ax = y$ är lösbart för alla y ,
5. A är inverterbar,
6. $\det A \neq 0$.

Tänk igenom varför vi har denna sammanfattning.

Anmärkning Egentligen finns ytterligare en punkt, men den berör linjära avbildningar som vi diskuterar i nästa föreläsning: att motsvarande linjära avbildning är bijektiv.

Sambandet mellan determinanter och linjära ekvationssystem kan också förtydligas i följande tabell

	homogent system $Ax = 0$	inhomogent system $Ax = y, y \neq 0$
$\det A = 0$	oändligt många lösningar	ingen eller oändligt många lösningar
$\det A \neq 0$	endast den triviala lösningen	precis en lösning

Exempel För vilka värden på a har systemet

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

oändligt många lösningar.

Enligt satsen ovan ser vi att detta är fallet kan bara hända då $\det A = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = (a-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1 - (a-2)^2 = (1 - (a-2))(1 + (a-2)) = (3-a)(a-1).$$

Vi ser att determinanten är noll precis så $a = 1, 3$. I alla övriga fall finns en entydigt bestämd lösning, men i dessa kan det antingen saknas lösning eller så finns det oändligt många. Vilket måste kontrolleras i varje fall:

1. I fallet $a = 1$ får vi systemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ z = 3 \\ 0 = 4 \end{cases},$$

så i detta fall saknas lösning

2. I fallet $a = 3$ får vi systemet

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ -2y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

vilket betyder att lösningen ges av linjen $(x, y, z) = (2 + t, t, -1 - 2t)$. I detta fall finns alltså oändligt många lösningar.

Svaret är alltså $a = 3$.