

Innehåll: Gausselimination och vektorer

Kapitel 1, 2.1-2.3

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- lösa ett ekvationssystem genom Gausselimination
- addera (geometriska) vektorer
- kunda några begrepp (linjärkombination, linjärt beroende, spänner upp, bas)

Gauss elimination

Är en algoritm som löser allmänna linjära ekvationssystem.

Ska alltid användas!

Exempel Vi har att

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ -3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Till vänster har vi två ekvationer och två obekanta, till höger en entydig lösning. Tänk igenom logiken i detalj!

Exempel Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Vi gör detta genom att addera ekvationer till varandra på sådant sätt att det blir färre och färre variabler i varje ekvation räknat uppifrån och nedåt.

Steg 1: få bort x_1 från den andra och tredje ekvationen genom att bilda $e_2 - 2e_1$ respektive $e_3 + e_1$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -5x_2 + 3x_3 = -11 \\ 3x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Steg 2: Få nu bort x_2 från tredje ekvationen genom att bilda $5e_3 + 3e_2$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -5x_2 + 3x_3 = -11 \\ -6x_3 = 12 \end{cases}$$

Mellan dessa ekvationssystem gäller ekvivalens!

Vi kan nu lätt lösa det sista systemet och få $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -2$! Detta är därför också lösningen till ursprungssystemet.

Ibland får man inte en entydig lösning utan några ekvationer blir t.ex. $0 = 0$ eller $0 = 1$. Vad betyder det för ekvationssystemet?

Exempel Om Gauss eliminationen ger

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

så finns oändligt många lösningar. Hur beskriver vi dem? Ett förslag är

$$x_1 = 1 - 5t, \quad x_2 = 2 + 3t, \quad x_3 = t$$

men det finns många andra sätt. Några förslag? (I det här fallet behöver därför inte din lösning se ut som den i facit och kan ändå vara rätt.)

Geometriska vektorer

För att komma från en punkt P till en punkt Q finns en kortast möjlig förflyttning (eller netto-). Själva förflyttningen är den rörelse man utför och betecknas $\vec{PQ}$. Om vi startar i P och gör förflyttningen hamnar vi i Q ; startar vi i en annan punkt hamnar vi någon annanstans. Själva förflyttningen utgör en (geometrisk) *vektor*. En sådan har en *storlek* och *riktning*. Ett undantag: vektorn som har längden noll har ingen riktning! (skrivs $\vec{0}$ eller bara 0).

Saker som kan beskrivas av vektorer:

- förflyttningar (enhet: m)
- hastigheter (enhet: m/s)
- acceleration (enhet: m/s²)
- krafter (enhet: N) - relaterade till acceleration genom Newtons tredje lag.

Vektorer kan

- adderas (tänk på en förflyttning följd av en annan)
- multipliceras med ett tal (skalär) - ändrar längd men inte riktning. Om skalären är negativ ändras riktningen till den motsatta!
- subtraktion = addition av en vektor med minus en annan.

Exempel Om O, P, Q är tre punkter kan vi skriva

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}.$$

Exempel (Mittpunktsformeln) Om O, P, Q är tre punkter och M är mittpunkten på sträckan mellan P och Q , så gäller att

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ}).$$

Följer av följande räkning (rita upp!!!)

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \frac{1}{2}\vec{PQ} = \vec{OP} + \frac{1}{2}(\vec{OQ} - \vec{OP}) = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ})$$

Exempel (Tyngdpunktsformeln) Låt P, Q, R vara hörn i en triangel och låt P_1 vara mittpunkt på sträckan QR . Sträckan PP_1 sägs då vara en *median*. Vidare, låt M vara den punkt på medianen PP_1 som delar denne i förhållandet 2:1. Då gäller (för allmän punkt O) att

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}).$$

Speciellt gäller att M är skärningspunkten mellan de tre medianerna (varför?)

Formeln följer ur följande räkning:

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \frac{2}{3}\vec{PP_1} = \vec{OP} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\vec{PQ} + \vec{PR}) =$$

$$\vec{OP} + \frac{1}{3}(\vec{OQ} - \vec{OP}) + \frac{1}{3}(\vec{OR} - \vec{OP}) = \text{saret}$$

Linjärkombinationer av vektorer

I F1 såg vi hur vi ibland kunde uttrycka en vektor i andra. Mer precist skrev vi t.ex. vektorn till tyngdpunkten som

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}, \quad \vec{u} = \vec{OP}, \vec{v} = \vec{OQ}, \vec{w} = \vec{OR}.$$

När vi skriver

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n$$

säger vi att vi skriver $\vec{u}$ som en *linjärkombination* av $\vec{u}_k, k = 1, \dots, n$.

Antag att detta går på två sätt:

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \dots + y_n\vec{u}_n.$$

Då måste vi ha att

$$z_1\vec{u}_1 + z_2\vec{u}_2 + \dots + z_n\vec{u}_n = 0, \text{ där } z_k = x_k - y_k, k = 1, \dots, n.$$

(0 är egentligen $\vec{0}$...). För att det ska vara två olika framställningar av $\vec{u}$ måste något $z_k \neq 0$ och vi kan då lösa ut $\vec{u}_k$ som en linjärkombination av de övriga.

Definition Vektorerna $\vec{u}_k, k = 1, \dots, n$ sägs vara linjärt beroende om någon av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. Om så inte är fallet sägs de vara linjärt oberoende.

Anmärkning Följande har vi redan sagt men tål att upprepas:

- Vektorerna är linjärt oberoende om

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0.$$

- Om $\vec{u}_k, k = 1, \dots, n$ är linjärt oberoende, kan en annan vektor $\vec{u}$ skrivas som en linjärkombination av dessa på *högst ett* sätt.

Definition Givet några vektorer $\vec{u}_k, k = 1, \dots, n$ så utgör alla vektorer som kan skrivas som linjärkombinationer av dessa ett vektorrum som *spänns upp* av dessa vektorer.

Exempel Tag två vektorer i rummet. Om ej parallella, spänner de upp ett plan. Om parallella en linje.

Baser i vektorrum - koordinatframställning av vektorer

För att beskriva vektorer (och kunna räkna med dem) måste man först fixera en s.k. bas av vektorer.

Definition Om vektorerna $\vec{u}_k, k = 1, \dots, n$ är linjärt oberoende så utgör de en *bas* för det vektorrum de spänner upp. Varje vektor i detta rum kan då på ett *entydigt sätt* skrivas som en linjärkombination av dessa:

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n.$$

och koefficienterna $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kallas då *koordinaterna* för vektorn $\vec{u}$ med *avseende på denna bas*.

Anmärkning Notera att även basvektorerna har koordinatframställningar:

$$\vec{u}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{etc.}$$

Basvektorer betecknas ofta $\vec{e}_k$ för att särskilja dem.

Definition Låt V vara ett vektorrum. Om vektorerna $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ är linjärt oberoende och spänner upp V , så säger man att $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ utgör en bas i V .

Vektorer i plan och rum

Vi börjar med att säga att två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är parallella om det finns ett tal x sådant att $\vec{u} = x\vec{v}$. (Speciellt är nollvektorn parallell med alla vektorer – varför?)

Två icke-parallella vektorer $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i rummet spänner upp ett plan och är därför en bas för detta plan. I samma plan finns också många andra baser.

Exempel I en bas $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ för ett plan M gäller att $\vec{u} = (1, 3), \vec{v} = (-2, 2)$. Utgör dessa en annan bas?

För att svara på det måste vi avgöra om de är parallella:

$$(1, 3) = x(-2, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2x \\ 3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2x \\ 4 = 0 \end{cases}$$

vilket saknar lösning. De är alltså inte parallella. Därmed utgör de en annan bas för samma plan M .

Varför samma plan? Varje vektor som kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ kan också skrivas som en linjärkombination av $\vec{u}, \vec{v}$ eftersom vi kan skriva de två vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ på det sättet. Varför? Vi vet att

$$\begin{cases} \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \vec{u} \\ -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \vec{u} \\ 8\vec{e}_2 = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{4}\vec{u} - \frac{3}{8}\vec{v} \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{8}\vec{v} \end{cases}$$

Vi kan nu uttrycka vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i koordinatform i basen $\vec{u}, \vec{v}$ som

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right).$$

Exemplet illustrerar att vi kan använda olika baser. Olika baser ger olika koordinater för en given vektor

Exempel Fixera en bas $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ för rummet och uttryck vektorer i rummet i den. Är vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 1, 2), \vec{u}_2 = (1, -1, 1), \vec{u}_3 = (7, 1, 11)$ en bas för rummet?

De är så precis om de är linjärt oberoende. För att avgöra om de är så ställer vi upp ekvationen

$$x_1(1, 1, 2) + x_2(1, -1, 1) + x_3(7, 1, 11) = (0, 0, 0)$$

som är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_2 - 6x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

så lösningen på ekvationssystemet är

$$x_1 = -4t, \quad x_2 = -3t, \quad x_3 = t.$$

Det finns alltså andra lösningar än noll-lösningen, vilket betyder att vektorer är linjärt beroende.

Exempel Är vektorn $\vec{v} = (-10, 4, 24)$ en linjärkombination av $\vec{u}_1 = (-1, 2, 3), \vec{u}_2 = (2, 4, -3)$?

Frågan är om det finns x_1, x_2 sådana att $(-10, 4, 24) = x_1(-1, 2, 3) + x_2(2, 4, -3)$, alltså

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -10 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -10 \\ 8x_2 = -16 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}.$$

Så svaret är ja!