

Uppgifter från kap 14

Mario Natiello

December 16, 2019

Plana Areor

14.2a Arealen av området mellan kurvorna $y = \frac{2}{1+x^2}$ och $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Först bestämmer man skärningspunkten mellan kurvorna, dvs x -värdet sådant att $\frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

dvs $x = \sqrt{3}$. Det blir $A = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$. Vi gör integralerna var för sig: $A = A_1 - A_2$.

$A_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2} dx = [2 \arctan x]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi$. Till A_2 använder vi övning 12.38. Vi får

$A_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]_0^{\sqrt{3}} = \ln(2 + \sqrt{3})$. Därmed $A = \frac{2}{3}\pi - \ln(2 + \sqrt{3})$.

Volym av kroppar med symmetriaxel och snittarea $A(x)$.

14.3 Et tält har höjden 2m, kvadratisk golvyta med sidan 2m och varje horisontell snitt är kvadratisk, med sidan $\sqrt{4-x^2}$, för $0 \leq x \leq 2$. Bestäm tältets volym samt volym av luften som finns högst 1 meter ovanför marken.

Höjden x är en symmetriaxel. Snittarean är kvadratisk, med ytan $A(x) = (4-x^2)$. Volymen blir

$V = \int_0^b (4-x^2) dx = 4b - \frac{b^3}{3}$. Tältets volym fås med $b = 2$, dvs $\frac{16}{3}m^3$. Luftvolym i den nedre delen fås med

$b = 1$, dvs $\frac{11}{3}m^3$.

Rotationsvolym som alstras då ett kurvsticke roterar kring x-axeln.

14.8 Ytan mellan kurvstycket $y = \sin x + 2 \cos x$ och x -axeln, för $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ roterar kring x -axeln. Beräkna rotationskroppens volym.

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2 \cos x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x) dx = \pi \left[x + 2 \sin^2 x + 3 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Efter insättning får vi resultaten $V = \frac{\pi(5\pi+8)}{4}$.

Rotationsvolym som alstras då ett kurvsticke roterar kring y-axeln.

14.10 Beräkna volymen av kroppen som uppkommer då ytan mellan x -axeln och kurvan $y = e^{-x^2}$ roterar kring y -axeln.

Obs! Ny rotation! Rörformeln. Också en generaliserad integral: $V = \int_0^\infty 2\pi x e^{-x^2} dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \pi [-e^{-x^2}]_0^z = \pi$.

Massa och masscentrum

14.15 Densiteten för en tråd med längden L är proportionell mot produkten av avstånden till trådens ändpunkter, med proportionalitetskonstant k . Beräkna trådens massa och tyngdpunktens läge relativ till ändpunkterna.

Vi antar att tråden är endimensionell, eller snarare att den har konstant snittarea över hela längden, och att den konstante är inbakad i k .

$$M = \int_0^L kx(L-x) dx = \left[k \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^L = k \frac{L^3}{6}.$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L kx^2(L-x) dx = \frac{1}{M} \left[k \left(L \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right]_0^L = \frac{k}{M} \frac{L^4}{12} = \frac{L}{2}.$$

Kurvlängd

14.30 Beräkna längden av den delen av kurvan $y = x^2 - 1$ som ligger under x -axeln.

Det handlar om den delen av kurvan i $-1 \leq x \leq 1$. $L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$. Efter substitutionen $t = 2x$ fås

$$L = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} dt. \text{ Vidare använder vi samma substitution som i 12.38: } u = t + \sqrt{1 + t^2},$$

dvs $t = \frac{u^2 - 1}{2u}$ och det blir:

$$L = \int_1^{2+\sqrt{5}} \left(u - \frac{u^2 - 1}{2u} \right) \frac{u^2 + 1}{2u^2} du = \frac{1}{4} \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{(u^2 + 1)^2}{u^3} du = \left[\frac{u^2 - u^{-2}}{8} + \frac{1}{2} \ln u \right]_1^{2+\sqrt{5}} = 5 + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

14.28 Bestäm längden av *asteroiden*, $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, för $0 \leq t \leq 2\pi$.

Vi har att $x' = -3\cos^2 t \sin t$, $y' = 3\cos t \sin^2 t$. Därmed blir $\sqrt{x'^2 + y'^2} = 3\cos t \sin t = \frac{3}{2} \sin 2t$. Längden blir $L = 4 \cdot \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3\cos 2\frac{\pi}{2} - (-3\cos 0) = 6$.

14.32b Bestäm längden av den logaritmiska spiralen, $x = e^{-\frac{\theta}{6}} \cos \theta$, $y = e^{-\frac{\theta}{6}} \sin \theta$, för $0 \leq \theta$. Vi har att $r(\theta) = e^{-\frac{\theta}{6}}$ och $r'(\theta) = -\frac{1}{6}e^{-\frac{\theta}{6}}$. Därmed har vi att $\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{37}}{6}e^{-\frac{\theta}{6}}$ och $L = \frac{\sqrt{37}}{6} \int_0^\infty e^{-\frac{\theta}{6}} d\theta = \sqrt{37}$.

Rotationsareor.

14.35 Beräkna arean av kroppen som alstras då kurvan $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ roterar ett varv kring x -axeln.

$$\text{Enligt formeln för rotationsareor har vi } A = \int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \left[\frac{\pi}{27} (1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{27} (\sqrt{1000} - 1).$$

Extra: Samma sak om kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ roterar kring y -axeln. Genom att vända på axlarna fås att

$$A = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[\frac{\pi}{6} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$