Partikulär lösn. LVS - 8

$y'' + ay' + by = h(x)$. Exempel och sedan sats.

Ex 1: $y'' + 2y' + 3y = 1 \rightarrow y$ konstant $\rightarrow y' = 0 = y''$

och $3 \cdot A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1/3}$

Ex 2: $y'' + 2y' + 3y = 2x + 4$ Försök: $y_p = Ax + B \Rightarrow y_p' = A$

$\Rightarrow y_p'' = 0.$

$0 + 2A + 3(Ax + B) = 2x + 4$

$3Ax + 2A + 3B = 2x + 4$

$3A = 2 \rightarrow A = 2/3$

$2A + 3B = 4 \rightarrow B = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$

$\boxed{y_p(x) = (2/3)x + 8/9}$

Ex 3: $y'' + 2y' = x + 1$ Ingen y-term. Hur får vi uten konstant?

Hög graden. $y_p = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$y'' = 2a$

$2a + 2(2ax + b) = x + 1$

$4ax + 2(a + b) = x + 1$

$\Rightarrow \boxed{a = b = 1/4}$ $y_p(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x)$ $(+c)$

välj ett c, t.ex $c = 0$.

Ex 4: $y'' + 2y' + 3y = (x + 1)e^x$

$y_p: (ax + b)e^x \rightarrow y_p' = e^x(ax + b + a)$

$\rightarrow y_p'' = e^x(ax + b + 2a)$

$e^x\{ax + b + 2a + 2(ax + b + a) + 3(ax + b)\} = e^x(x + 1)$

$e^x\{6ax + 6b + 4a\} = e^x(x + 1) \rightarrow a = \frac{1}{6}, \ b = \frac{1}{18}$

Ex: $y'' + 9y = \cos 3x$ dvs: $y'' + 9y = e^{3ix}$ och vi behåller $\mathrm{Re}(y_p)$

$y_p = P(x)e^{3ix}$; p: polynom.

$y_p' = p'e^{3ix} + 3ipe^{3ix} = (p' + 3ip)e^{3ix}$

$y_p'' = e^{3ix}(3ip' - 9p + p'' + 3ip')$

$$e^{3ix}\left(p'' + 6ip' - 9p + 9p\right) = e^{3ix}$$

dvs $p'' + 6ip' = 1 \rightarrow p' = \frac{1}{6i}$ och $p(x) = -ix/6$

$$y_p(x) = -\frac{ix}{6}e^{3ix} = \frac{1}{6}x\sin x - \frac{i}{6}x\cos x$$

$y_p(x)$ blir då $\frac{1}{6}x\sin x$.

SAMMANFATTNING: För $h(x) = \{$ polynom, e^{rx} polynom, "$r \in \mathbb{C}$"$\}$

Försök med y_p av samma typ som $h(x)$.

om det inte skulle räcka, höj graden i polynomet, t.ex.

då $\begin{cases} \bullet\ y\text{-term saknas} \\ \bullet\ r \equiv \text{en rot till den homogena ekvationen.} \end{cases}$

Exempel: Lös $y'' + y' - 2y = x^2 + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

① Homogen: $r^2 + r - 2 = 0 \rightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \{1, -2\}$

$$y_h(x) = Ae^{x} + Be^{-2x}$$

② Part: $y_p(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$

$$2a + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

$$\underbrace{-2a}_{=1}x^2 + \underbrace{(2a - 2b)}_{=0}x + \underbrace{(2a + b - 2c)}_{=1} = x^2 + 1$$

$a = b = -1/2$, $c = -5/4$ $\quad y(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + Ae^{x} + Be^{-2x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 1 = -5/4 + A + B \\ y'(0) &= -2 = -1/2 + A - 2B \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 5/4 \end{aligned}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{x} + \frac{5}{4}e^{-2x}}$$

Resonans:

$$y'' + 9y = \cos 3t \; ; \; y(0) = 1 ; \; y'(0) = 0$$

(1) $y_h(x) = A\cos 3t + B\sin 3t$

$y_p(x) = \frac{1}{6} t \sin 3t$

$y(x) = \frac{1}{6} t \sin 3t + A\cos 3t + B\sin 3t$

$y(0) = A = 1$

$y'(0) = \left[\frac{1}{6}\sin 3t + 2t\cos 3t - 3A\sin 3t + 3B\cos 3t \right]_{t=0} = 3B$

$\Rightarrow B = 0.$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{6} t \sin 3t + \cos 3t}$$ Resonans!

Om ekvationen har dämpning, kan lösningen hållas begränsad.

T.EX: $y'' + 2y' + 10y = \cos 3t$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

$y_h = e^{-t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$

$y_p = \frac{1}{37}(\cos 3t + 6\sin 3t)$

$A = 36/37$

$B = 6/37$

$$y(t) = \frac{1}{37}\left[e^{-t}\left(36\cos 3t + 6\sin 3t\right) + \cos 3t + 6\sin 3t \right]$$ VÄXER Ej

Högreordning: samma koncept.

Ex: 15.60 Lös $y^{(4)} - 3y'' - 4y = e^{-2x}$. $\boxed{y = y_h + y_p}$

$r^4 - 3r^2 - 4 = 0 \underset{s = r^2}{\rightarrow} s^2 - 3s - 4 = 0 \Rightarrow s = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$

$s = 4, -1$

$\rightarrow r = \pm 2, \pm i$

$y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + C\cos x + D\sin x$

$-\frac{1}{20}e^{-2x} \leftarrow y_p(x) = p(x)e^{-2x} \rightarrow y_p' = e^{-2x}(p' - 2p) \rightarrow y_p'' = e^{-2x}(p'' - 4p' + 4p)$

$y''' = e^{-2x}(p''' - 4p'' + 4p' - 2(p'' - 4p' + 4p)) = e^{-2x}(p^{(3)} - 6p'' + 12p' - 8p)$

$y^{(4)} = e^{-2x}(p^{(4)} - 6p^{(3)} + 12p'' - 8p' - 2(p^{(3)} - 6p'' + 12p' - 8p))$

$\rightarrow p^{(4)} - 8p^{(3)} + 24p'' - 32p' + 16p - 3(p'' - 4p' + 4p) - 4p = 1 \rightarrow p' = -1/20.$