

linj. homogena ekv. med konstanta koeff.:

LV 5-6

(*) $y'' + ay' + by = 0$ Lös. kan misstäckas vara någon form av $y = e^{rx}$.

Vi provar. $y = e^{rx} \rightarrow y' = r e^{rx} \rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$

insättning: $(r^2 + ar + b)y = 0$

$P(r)$ karakteristisk ekvation

Sats 15.2 om r_1, r_2 är nollställen till $r^2 + ar + b$ så ges lösningen

till (*) av:
$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} & \text{om } r_1 \text{ dubbelrot.} \end{cases}$$

Beris: Första fallet genom insättning. Andra:

$$\{(C_1 x + C_2) e^{r_1 x}\}' = e^{r_1 x} \{r_1 (C_1 x + C_2) + C_1\}$$

$$\{(C_1 x + C_2) e^{r_1 x}\}'' = e^{r_1 x} \{r_1^2 (C_1 x + C_2) + r_1 C_1 + r_1 C_1\}$$

(*) blir:
$$e^{r_1 x} \left\{ r_1^2 C_1 x + r_1^2 C_2 + 2r_1 C_1 + a r_1 C_1 x + a r_1 C_2 + r_1 C_1 + b C_1 x + b C_2 \right\}$$
$$= e^{r_1 x} \left\{ \underset{=0}{C_1 x (r_1^2 + a r_1 + b)} + \underset{=0}{C_2 (r_1^2 + a r_1 + b)} + \underset{=0}{(2r_1 + a) C_1} \right\}$$

ty $r_1 = -a/2$ (dubbelrot).

Ex: $y'' - y' - 20y = 0 \rightarrow r^2 - r - 20 = 0 \rightarrow r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}$
 $\rightarrow r = \{5, -4\}$

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-4x}$$

Ex: $y'' + 6y' + 9y = 0 \rightarrow r^2 + 6r + 9 = 0 \equiv (r+3)^2 = 0 \rightarrow \underline{r = -3}$

Konstatera att $(C_1 x + C_2) e^{-3x}$ löser ekv.

$$e^{-3x} (9(C_1 x + C_2) - 6C_1 - 3(C_1 x + C_2) \cdot 6 + 6C_1 + 9(C_1 x + C_2)) = 0$$

Ex: $y'' + 2y' + 2y = 0 \rightarrow r^2 + 2r + 2 = 0 \rightarrow \boxed{r = -1 \pm i}$

Eul. sats: $y(x) = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x} = e^{-x} \{C_1 (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x)\}$

$$y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_A e^{-x} \cos x + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_B e^{-x} \sin x$$

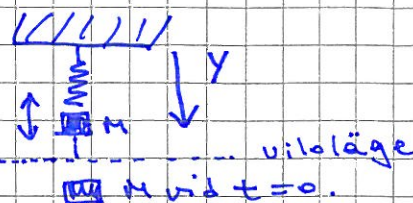
$$y(x) = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$$

obs: om problemet var reellt från början, så är A & B reella.

SATS 15.3 om $r^2 + ar + b$ har komplexa rötter $r = \alpha \pm i\beta$ så är lösningen $y(x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

Ex: Harmonisk svängning.

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -ky & (\text{Newton + Hooke}) \\ y'(0) = 0; y(0) = 1. \end{cases}$$



$$y'' + \frac{k}{m} y = 0 \rightarrow r^2 + k/m = 0 \quad r = \pm i \sqrt{k/m}$$

$$y(x) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$y(0) = 1 = A + B \cdot 0 \Rightarrow A = 1$$

$$y'(0) = 0 = \sqrt{\frac{k}{m}} (-A \sin \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0) \Rightarrow B = 0$$

$$\boxed{y(x) = \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

Dämpning: Anta att en extra kraft $F = -cy'$ är verksam.

$$my'' = -ky - cy' \rightarrow \boxed{y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0}$$

$$r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} = 0$$

$$r = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

$$c^2 - 4km > 0: \quad r_1, r_2 \text{ reella och negativa}$$

$$c^2 - 4km < 0 \quad r_1, r_2 \text{ komplexkonj. } \operatorname{Re}(r_1) = \operatorname{Re}(r_2) = \frac{-c}{2m} < 0.$$

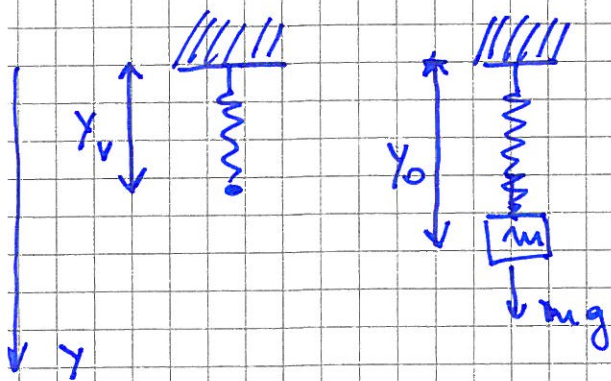
$$c^2 - 4km = 0 \quad r_1 = r_2 = -c/2m \text{ reella och negativa.}$$

överkritisk dämpning.

kritisk dämpning.

dämpad svängning.

Harmoniska svängningar



y -axels positiv riktning
från fästningspunkten
till marken.

y_v : Viloläge för fri fjäder

y_0 : jämviktsläge med massan

MARK

Hookes lag: Fjäderkraft $F = -k(y - y_v)$

$k > 0$, kraften verkar i motsatt riktning till sträckningen

Newtons viloläge: summan av krafterna lika med 0:

$$0 = mg - k(y_0 - y_v)$$

Newtons rörelseekvation: summan av krafter = massa $\times$ acceleration

$$(*) \quad m \ddot{y} = mg - k(y - y_v)$$

Låt $y = z + y_0$ dvs z är avvikelser från jämviktsläge

$$m(z + y_0)'' = mg - k(z + y_0 - y_v) \quad \text{dvs}$$

$$m z'' = -kz + \underbrace{mg - k(y_0 - y_v)}_{=0}$$

dvs:

$$\boxed{z'' + \frac{k}{m} z = 0}$$

Dämpning: En kraft $F_D = -c y'$ tillkommer. ~~eller~~

Notera att $y' = z'$. Därmed:

$$\boxed{z'' + \frac{c}{m} z' + \frac{k}{m} z = 0}$$