

Variabelseparering

LV5-4

Ex: $e^{y(x)} \cdot y'(x) = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx} \{e^{y(x)}\} = x^2$

$$\Rightarrow e^{y(x)} = \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow \boxed{y(x) = \ln\left(\frac{x^3}{3} + C\right)}$$

Notera: $e^y \frac{dy}{dx} = x^2 \rightarrow \int e^y dy = \int x^2 dx$
 $\rightarrow e^y = x^3/3 + C$

Metoden fungerar när man kan i ekvationen "separera" alla x på ena sidan, alla y på andra sidan

Generellt: $g(y(x)) \cdot y'(x) = h(x)$ Låt G vara primitiv till g .

$$\{G(y(x))\}' = h(x) \rightarrow G(y(x)) = \int h(x) dx$$

$$y(x) = G^{-1}\left(\int h(x) dx\right)$$

Ex. En ~~vanlig~~ cylindrisk vatten tank tappas ^{av} genom ett hål i botten.

Vid $t=0$ är vatten djupet 8 dm.

Vid $t=2$ m är djupet hälften.

Hur lång tid tills tanken är tom?

→ Torricelli's lag $y' = -k\sqrt{y}$ (djupet minskar som roten av y .)

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int -k dt$$

$$2\sqrt{y} = -kt + C \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}(C - kt)^2}$$

$$y(0) = 8 = C^2/4 \Rightarrow C = 4\sqrt{2}$$

$$y(2) = 4 = \frac{1}{4}(4\sqrt{2} - 2k)^2 \Rightarrow 4 = 4\sqrt{2} - 2k \Rightarrow 2k = 4(\sqrt{2} - 1)$$

$$\boxed{k = 2(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\text{TANKEN Tom: } y(t) = 0 \Rightarrow \boxed{t = C/k}$$

i detta fall

$$t = \frac{4\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 6.8.$$

Integralekvationer

Ur analysens midsats får vi att $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$
 (givet att f är kontinuerlig). Den vägen kan en differ. härledas

Ex. $y(x) = 5 + \int_0^x \frac{y(t)}{t^2+1} dt$

Derivera: $y'(x) = \frac{y(x)}{1+x^2}$ eller

$$y'(x) - \frac{1}{1+x^2} y(x) = 0$$

Åt andra hållet behövs något som fixerar rätt $y(x)$
 bland alla primitiva: BEGYNNELSEVILLKOR!

$$\underline{y(0)} = 5 + \int_0^0 \frac{y(t)}{1+t^2} dt = 5$$

Lös ekvationen! $y(x) = 5 e^{\arctan x}$

Andra ordningen:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

Eftersom det förekommer 2 primitivfunktioner, behövs 2 villkor

Ex: $y'' = -\cos x \rightarrow y' = -\sin x + C \left(= -\int \cos x dx \right)$

$$\rightarrow y(x) = \cos x + Cx + D$$

Linjära ekv. uppfyller att om $y_1(x), y_2(x)$ är lösningar, så är

$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ också en lösning av en ekv. med samma a, b, c faktorer.

Beris: 5371. Insättning

Sats: om $y_p(x)$ är lös. till $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$

så ges samtliga lösningar av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$,

där $y_h(x)$ är alla lösningar till den homogena ekvationen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Linjäritet:

y_1 löser

$$a y'' + b y' + c y = h_1$$

y_2 löser

$$a y'' + b y' + c y = h_2$$

$$\left. \begin{array}{l} a y'' + b y' + c y = h_1 \\ a y'' + b y' + c y = h_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \text{ löser}$$
$$a y'' + b y' + c y = \alpha h_1 + \beta h_2$$

Bevis:

$$\begin{aligned} & a (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + b (\alpha y_1 + \beta y_2)' + c (\alpha y_1 + \beta y_2) = \\ &= \alpha [a y_1'' + b y_1' + c y_1] + \beta [a y_2'' + b y_2' + c y_2] = \\ &= \alpha h_1 + \beta h_2. \end{aligned}$$

Homogen + partikulär (sats 15.1):

Låt y vara en lösning till $y'' + a y' + b y = h$

Vilken ekv. uppfyller $y - y_p$?

$$\begin{aligned} y'' - y_p'' + a(y' - y_p') + b(y - y_p) &= (y'' + a y' + b y) - (y_p'' + a y_p' + b y_p) = \\ &= 0 \quad !! \end{aligned}$$

$\therefore$ Varje lösning y kan skrivas som $y = y_h + y_p$ där $y_h = y - y_p$.

Omvänt: $y_h + y_p$ löser ekvationen ty

$$\begin{aligned} y_h'' + y_p'' + a(y_h' + y_p') + b(y_h + y_p) &= (y_h'' + a y_h' + b y_h) + (y_p'' + a y_p' + b y_p) = \\ &= 0 + h \quad \blacksquare \end{aligned}$$