

Differentialekvationer

En likhet som innehåller en funktion, derivatan, variabla

Ex: $y' + y = x$.

En lösning på intervallet I är en funktion $y(x)$ som uppfyller ekvationen $\forall x \in I$.

Ordning: största förekommande derivata.

Ekvationer av ordning 1.

Ex: $y'(x) = f(x)$. Lösning: primitiv till f : $y(x) = F(x) + C$

Linjära ekv. av första ordning:

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x)$$

Jfr med ej linjär: $\{y'(x)\}^2 + \{y(x)\}^2 = 1$.

Ex: $\sin x \cdot y' + \cos x \cdot y = \sin x$.

$$(\sin x \cdot y)' = \sin x \rightarrow \sin x \cdot y = -\cos x + C$$

$$\rightarrow y(x) = \cancel{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{C}{\sin x}$$

Vilken intervall kan vi prata om? T.ex $I = [\pi/4, 3\pi/4]$

Om man vet något mer om $y(x)$, t.ex. $y(\pi/2) = 1 \rightarrow C$ kan bestämmas (i detta fall $y(\pi/2) = 1 = -\frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2} + \frac{C}{\sin \pi/2} = C$ dvs $C=1$)

Den här metod kallas för INTEGRERANDE FAKTOR:

$y' + g(x)y = h(x)$ ① Låt $G(x)$ vara en primitiv av $g(x)$

② Multiplicera ekv med $e^{G(x)}$ (alltid $\neq 0$): $e^{G(x)}y' + e^{G(x)}g(x)y = e^{G(x)}h$

dvs: $(e^{G(x)}y)' = e^{G(x)}h$.

③ Bestäm en primitiv till h.t. dvs:

$$e^{G(x)}y = \int e^{G(x)}h(x) dx$$

④ $y(x) = e^{-G(x)} \cdot \int e^{G(x)}h(x) dx$

Ex: Lös $\sqrt{x} y' + y = \sqrt{x}$, $\{x > 0\}$

① Dela med $\sqrt{x}$: $y' + \frac{1}{\sqrt{x}} y = 1$

② $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow G(x) = 2\sqrt{x}$

③ $e^{2\sqrt{x}} y' + e^{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} y = e^{2\sqrt{x}} = (e^{2\sqrt{x}} y)'$

④ Primitiv: $e^{2\sqrt{x}} y = \int e^{2\sqrt{x}} dx = \left[\begin{matrix} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{matrix} \right] = \int e^{2t} \cdot 2t dt =$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} \cdot 2t - \int \frac{1}{2} e^{2t} \cdot 2 dt = e^{2t} (t - 1/2) + C$$

$$= e^{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1/2) + C$$

⑤ $y(x) = \sqrt{x} - 1/2 + C e^{-2\sqrt{x}}$

Test: $\sqrt{x} y' + y = \sqrt{x} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} + C e^{-2\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right\} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} + C e^{-2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. STÄMMER!

Begynnelsevärdesproblem: $\sqrt{x} y' + y = \sqrt{x}$, $y(1) = 1$, $\{x \geq 1\}$.

$$y(1) = \sqrt{1} - 1/2 + C e^{-2} \Rightarrow C = e^2/2.$$

$$y(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2(1-\sqrt{x})}$$

Ex: En bakteriekultur växer med en takt som är proportionell mot antalet bakterier. I en viss tidpunkt är antalet bakterier 10^6 och efter en timme har det blivit 10^7 . Bestäm antalet bakterier $y(t)$ som funktion av tiden.

$y' = ky$, $y(0) = 10^6$ (begynnelse tid: $t=0$. Begynnelsevillkor)

$y' - ky = 0$ $g(t) = -k \rightarrow G(t) = -kt$

$e^{-kt} y - e^{-kt} ky = e^{-kt} \cdot 0 = 0 = (e^{-kt} y)' \Rightarrow e^{-kt} y(t) = C$

$\Rightarrow y(t) = C e^{+kt}$ $\left\{ \begin{matrix} y(0) = C = 10^6 \\ y(1) = 10^7 = C e^k \end{matrix} \right\} e^k = 10 \quad k = \ln 10$

$y(t) = 10^6 e^{t \ln 10} = 10^6 \cdot 10^t = 10^{(6+t)}$ (t i timmar).

Rimlig? Endast för korta tider (många få timmar).

Newton's avkylningslag.

En kropp som är varmare än omgivningen svalnar med en hastighet proportionellt mot temperaturskillnaden.

$$T' = -k(T - T_0)$$

↑
obs.

T_0 : omgivning.

$$T(t=0) > T_0$$

Ex: Te bryggs med 100° vatten. Efter 5 min är det 70° .

Hur länge dröjer det innan teet blir 50° ?

$$T(t=0) = 100^\circ; \quad T(t=5) = 70^\circ; \quad T_0 = 20^\circ; \quad T(x) = 50$$

↑ sökes.

$$T' + kT = kT_0$$

$$g(t) = k \rightarrow G(t) = kt \rightarrow$$

$$e^{kt} T'(t) + e^{kt} k T(t) = e^{kt} k T_0 \quad \text{dvs} \quad (e^{kt} T(t))' = e^{kt} k T_0$$

$$\int_0^t (e^{ks} T(s))' ds = T_0 \int_0^t e^{ks} k ds = T_0 (e^{kt} - 1)$$

$$= e^{kt} T(t) - T(0) = T_0 (e^{kt} - 1)$$

$$e^{kt} (T(t) - T_0) = T(0) - T_0$$

$$T(t) = T_0 + e^{-kt} (T(0) - T_0)$$

Specifikt: $T(t) = 20 + 80e^{-kt}$ $k = ?$

$$T(5) = 70 = 20 + 80e^{-5k} \Rightarrow -5k = \ln(5/8)$$

$$k = \frac{1}{5} \ln(8/5)$$

$$50 = 20 + 80e^{-kx}$$

$$\Rightarrow -kx = \ln 3/8 \Rightarrow x = 5 \frac{\ln 8/3}{\ln 8/5} \approx 10.43 \text{ min.}$$

Kan skivas om till $T(t) = 20 + 80 \left(\frac{5}{8} \right)^{(t/5)}$