Uppgifter från kap 13

November 27, 2019

Uppgift 13.12d

Bestäm derivatan av $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Vi använder analysens huvudsats. $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar, så vi beräknar $f'(x)$ via definitionen av derivatan. Först skriver vi om funktionen tydligare: $f(x) = \int_a^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt - \int_a^{\cos x} \sqrt{1-t^2}dt$. Omskrivningen gäller för vilket som helst tal a i $[0,1]$ och dessutom beror funktionen inte på a. Nu räknar vi:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{\sin(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt - \int_a^{\cos(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt - \left(\int_a^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt - \int_a^{\cos x} \sqrt{1-t^2}dt\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\sin x}^{\sin(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt - \int_{\cos x}^{\cos(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\sin x}^{\sin(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\cos x}^{\cos(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt
\end{aligned}
$$

Det är två problem av samma sort dvs en typ som man känner man igen från 13.11, 13.12a och 13.12b. Minustecken före andra termen kännetecknar den nedre integrationsgränsen. Vi löser var för sig, båda med medelvärdesatsen. Det finns ett reelt tal ζ mellan $\sin x$ och $\sin(x+h)$, dvs $\zeta = (1-\alpha)\sin(x+h) + \alpha \sin x$ sådan att $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\sin x}^{\sin(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x)\sqrt{1-\zeta^2}$. När $h \to 0$ så blir $\zeta = \sin x$ och $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x)\sqrt{1-\zeta^2} = \cos x\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos^2 x$ (eftersom $0 < x < \frac{\pi}{2}$ och bägge faktorer är positiva). För det andra fallet har vi $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\cos x}^{\cos(x+h)} \sqrt{1-t^2}dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\cos(x+h) - \cos x)\sqrt{1-\zeta^2}$, där nu $\zeta = (1-\alpha)\cos(x+h) + \alpha\cos x$ och med samma procedur fås gränsvärdet till $-\sin^2 x$. Slutligen blir $f'(x) = \cos^2 x - \left(-\sin^2 x\right) = 1$. Ett krångligt sätt att beskriva $f(x) = x$.

Uppgift 13.16 Integraluppskattning

Visa med integraluppskattning att $\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+a} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{a}$, där a är en positiv konstant.

Serien består av positiva avtagande termer och den tillhörande funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2+a}$ är också positiv och avtagande. Integraluppskattningen säger att för positiva heltal N så gäller att (eq. 13.28, s 331 i boken)

$$\int_0^N \frac{1}{x^2+a}dx + f(N) \quad \leq \textstyle\sum_{k=0}^N \frac{1}{k^2+a} \leq \quad \displaystyle\int_0^N \frac{1}{x^2+a}dx + f(0).$$

Vi beräknar integralen först, sedan olikheten och sist betraktar vi gränsvärdet då $N \to \infty$.

$\displaystyle\int_0^N \frac{1}{x^2+a}dx = \int_0^N \frac{1}{a\left(\frac{x^2}{a}+1\right)}dx$. Gör substitutionen $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$. Det blir:

$\displaystyle\int_0^N \frac{1}{x^2+a}dx = \int_0^{\frac{N}{\sqrt{a}}} \frac{\sqrt{a}}{a\,(t^2+1)}dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{N}{\sqrt{a}}$. Olikheten blir

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{N}{\sqrt{a}} + \frac{1}{N^2+a} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k^2+a} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{N}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a}$. Eftersom både vänster- och högerled har gränsvärde så har vi att $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+a} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}$.

Uppgift 13.18b

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan u}{1+\tan u}du$. Gör substitutionen $t = \tan u$. Man får $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)}{(1+t)(1+t^2)}dt$. Via partialbråk

$J = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t)} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \left[\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$

Uppgift 13.20c

Beräkna $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^3 x + \tan^4 x\right) dx$.

Vi använder substitutionen $t = \tan x$. Därmed är $x = \arctan t$ och $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Integrationsgränser blir $t = 0$ och $t = 1$. Därmed blir $I = \displaystyle\int_0^1 \left(t^3+t^4\right)\frac{dt}{1+t^2}$. Via polynomdivision fås $I = \displaystyle\int_0^1 \left(t^2+t-1+\frac{1-t}{1+t^2}\right) dt$ och

$I = \displaystyle\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\ln 2.$

Uppgift 13.27c

Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Vi försöker med substitutionen $t = \sqrt{x}$ och därmed $2t\,dt = dx$. Integrationsgränser förblir $t = 0$ och $t = 1$. Därmed

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \arctan t\,dt = 2\left[t\arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt = \left[2t\arctan t - \ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Uppgift 13.30c,d

- 13.30c: Avgör om integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x-\ln x}$ är konvergent.

  Vi använder jämförelsesatsen. För alla $x \in [1,\infty)$ gäller att $\dfrac{1}{x-\ln x} > \dfrac{1}{x}$. Dessutom är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergent eftersom $\int_1^Z \frac{dx}{x} = \ln Z$ saknar gränsvärde då $Z \to \infty$. Därmed är $\int_1^\infty \frac{dx}{x - \ln x}$ också divergent.

- 13.30d: Avgör om integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{x + \ln x}$ är konvergent. Här använder vi en annan sats: $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = 1$. Därmed är integralerna i 13.30c och 13.30d båda divergenta.

Uppgift 13.42

Avgör om den generaliserade integralen $\int_2^\infty \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)}dx$ är konvergent och beräkna dess värde.

Använd först en jämförelsesats. I området $[2, \infty)$ är $f(x) = \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)} \geq 0$. Dessutom är $0 \leq \frac{2x-4}{2x+1} < 1$, dvs att $f(x) \leq \frac{1}{x^2+1} = g(x)$. Eftersom $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{Z\to\infty} \arctan Z - \arctan 2 = \frac{\pi}{2} - \arctan 2$ så är den generaliserade integralen med $g(x)$ konvergent och därmed även integralen av $f(x)$. Nu när man vet att integralen är konvergent återstår fortfarande att räkna dess värde, vilket man gör med definitionen.

Vi beräknar först $\int_2^Z \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)}dx$ via partialbråksuppdelning. $\frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$. Därmed är $A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(2x+1) = x^2(A+2B) + x(2C+B) + A + C = 2x-4$. Lösningen är $A = -4$, $B = 2$, $C = 0$, dvs att $\int_2^Z \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)}dx = \int_2^Z \left(\frac{-4}{2x+1} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \left[-2\ln|2x+1| + \ln(x^2+1)\right]_2^Z$.

Det sista uttrycket kan srivas om till $= \left[\ln\left(\frac{x^2+1}{(2x+1)^2}\right)\right]_2^Z = \ln\left(\frac{Z^2+1}{(2Z+1)^2}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)$.

Eftersom $\lim_{Z\to\infty}\left(\ln\left(\frac{Z^2+1}{(2Z+1)^2}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \ln\frac{5}{4}$, så är integralen konvergent, med värde $\ln\frac{5}{4}$.

Uppgift 13.48

Bestäm konstanten a så att $\int_1^2 (x-a)\ln x dx = 0$.

Vi börjar med att dela problemet i två och göra integralerna: $\int_1^2 (x-a)\ln x\,dx = \int_1^2 x\ln x\,dx - a\int_1^2 \ln x\,dx$. Den första integralen tar vi med partialintegration. f är x och g är $\ln x$:

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2\ln 2 - 1) - (-\frac{1}{4}) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

På liknande sätt får man att $\int_1^2 \ln x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}dx = [x\ln x - x]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (-1) = 2\ln 2 - 1$.

Problemet kan uttryckas nu som $\left(2\ln 2 - \frac{3}{4}\right) - a(2\ln 2 - 1) = 0$, dvs $a = \frac{2\ln 2 - \frac{3}{4}}{2\ln 2 - 1}$.