

Hur kan vi utveckla integralerna?

t.ex. $\begin{cases} * & \text{obegränsad integrationsintervall} \\ * & \text{obegränsad integrand (f(x), också)} \end{cases}$

obegränsad integrationsintervall. Generaliserade integraler.

Def: Låt $f(x)$ definierad på $[a, \infty)$ vara integrerbar på $[a, x]$ för varje $x > a$.

Om $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx = A$ existerar ändligt, så säger

vi att $\int_a^\infty f(x) dx = A$ är konvergent med värde A .

om gränsvärdet är ∞ eller saknas säger vi att integralen är divergent

$$\text{Ex 1: } \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-x} dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^z = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 - e^{-z}) = 1.$$

Konvergent generaliserad integral.

$$\text{Ex 2: } \int_0^\infty e^x dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^x dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[e^x \right]_0^z = \lim_{z \rightarrow \infty} (e^z - 1) = \infty$$

Divergent.

$$\text{Ex 3: } \int_0^\infty \sin x dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[-\cos x \right]_0^z = \lim_{z \rightarrow \infty} 1 - \cos z \quad \text{SAKNAS!}$$

Divergent

obegränsad integral Generaliserade integraler

T.ex. då $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow a^+$ kan man ibland hantera integralen nästan som vanligt.

Def: f definierad på $(a, b]$ och integrerbar på $[c, b]$, $a < c < b$

Om $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx = A$ existerar ändligt säger vi

att $\int_a^b f(x) dx$ är konvergent, med värde A .

Annus, divergent

LV4-6

$$\text{Ex: } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \stackrel{?}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_z^1 =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{z}) = 2. \quad \text{ok. konvergent.}$$

Däremot är $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergent.

$$\text{Ex: } I = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}(x+2)} dx$$

zggg generaliserade.

Videla upp torn $I = I_1 + I_2$; $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+2)}$; $I_2 = \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+2)}$

$$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1 \quad dx = 2t dt$$

$$I_1 = \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+2)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{2t dt}{t(t^2+3)} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1+(t/\sqrt{3})^2}$$

$$u = t/\sqrt{3} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{3}} dt \quad I_1 = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3} du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I_1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$I_2 = \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+2)} = \int_1^{\infty} \frac{2 dt}{t^2+3} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3} du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} - I_1$$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 = \pi/\sqrt{3}}$$