

Analysens huvudsats

Man kan tänka sig en integralfunktion:

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{Analysens huvudsats relaterar } f \text{ till } S':$$

SATS 13.6: Anta att f är kontinuerlig på I (ett intervall) och att $a \in I$. Funktionen $S(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in I$ är
 då deriverbar och $S'(x) = f(x)$.

Bevis: Vi kontrollerar deriverbarheten:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \right\} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad \text{Enligt medelvärdesatsen finns det} \\ x \leq \xi \leq x+h \text{ sådan att}$$

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi) \quad \text{vi kan skriva } \xi = x + \theta h; \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + \theta h) = \underline{f(x)} \quad \blacksquare$$

(ty f är kontinuerlig).

Alltså $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

Ännu mer: $\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} S(g(x)) = S'(g(x)) \cdot g'(x) \\ = f(g(x)) \cdot g'(x).$

Insättningsformeln f kont. på I , F en primitiv till f

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{Barrow's foot})$$

Bevis: $S(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C$, $S(a) = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$

$$\therefore S(x) = F(x) - F(a) \quad \text{och} \quad \underline{S(b) = F(b) - F(a)}.$$

Träning kring huvudsatsen: övn 13.8 $\rightarrow$ 13.21.

Variabelbyte och partiellintegration kan nu formuleras som integralsatsen:

Sats: $g \in C^1$ på $[a, b]$ och $f \in C^0$ på $I \supset g([a, b])$.

Då gäller att $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$, där

$$\alpha = g(a), \quad \beta = g(b)$$

$$\text{Ex: } \int_0^4 x e^{1/2 x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2/2 \\ dt = x dx \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=8 \end{array} \right] = \int_0^8 e^t dt = \underline{\underline{e^8 - 1}}$$

Variabelbytet sträcker sig till integralens ändpunkter.

Sats: F primitiv till f och f, g kontinuerliga på $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \left[F(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b F'(x) g(x) dx.$$

Beris: $F(x) g'(x) - \int F'(x) g(x) dx$ är en primitiv till $f(x) g'(x)$.

$$\text{Ex: } \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = 1$$