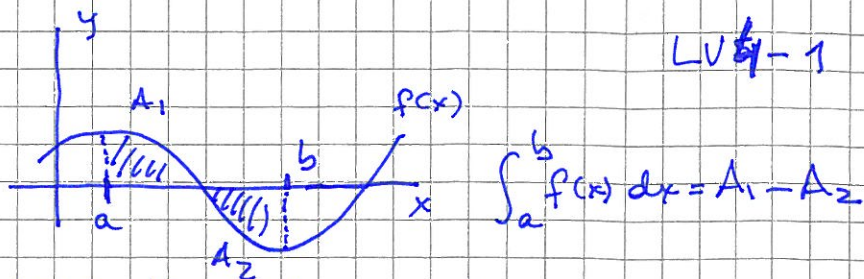


Kap 13.

LV 4-1

Area med tecken.



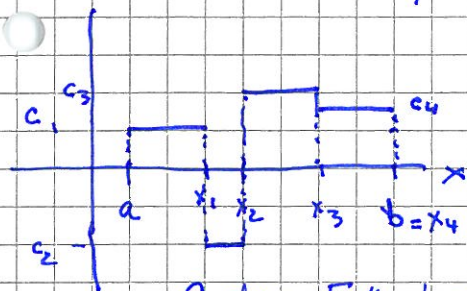
Målet är att ge innehåll till sådana uttryck.

Integral av en trappfunktion $\longleftrightarrow$ summa av rektangelareor (med tecken)!

En trappfunktion är styckvis konstant på delintervaller.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi(x) = c_k, \quad x_{k-1} \leq x < x_k; \quad k = 1, 2, \dots, n$$



$$\text{Def: } \int_a^b \phi(x) dx = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})$$

Sats: För trappfun. gäller att

$$\int_a^b \alpha \phi(x) dx = \alpha \int_a^b \phi(x) dx$$

$$\int_a^b (\phi(x) + \psi(x)) dx = \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$$

$$\int_a^b \phi(x) dx = \int_a^c \phi(x) dx + \int_c^b \phi(x) dx; \quad a < c < b$$

obs! behövs om f är integrerbar i ett större intervall

$$\phi(x) \leq \psi(x) \text{ i } [a, b] \Rightarrow \int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$$

Visa funktioner kan stängas in mellan trappfunktioner som skiljer sig mindre och mindre då indelningen av $[a, b]$ förfinas.

Def: Låt $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ begränsad. f kallas integrerbar om $\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \leq f \leq \psi$, trappfunktioner, sådana att $\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx < \varepsilon$

Detta innebär att det finns exakt ETT TAL I :

$$\int_a^b \psi(x) dx \geq I \geq \int_a^b \phi(x) dx \quad \text{för alla trappfun. end. def.}$$

Def. För f integrerbar $\int_a^b f(x) dx = I$.

Exempel i en presentation.

Annat exempel fä. s. 307-8

Sats: f kontinuerlig på $[a, b] \Rightarrow f$ integrerbar på $[a, b]$.

Ett sätt att koppla trappfunktioner till f kallas Riemannsumma:

Låt $[a, b]$ delas upp som $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

En Riemannsumma till f på $[a, b]$ är

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \quad \text{för någon } x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$$

Sats 13.3: f kontinuerlig på $[a, b]$.

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{då } n \rightarrow \infty \text{ och } \text{indelningens bredd} \rightarrow 0.$$

$\Rightarrow$ Sats 13.4 För ^{av f}integraler gäller samma regler som för trappfunktioner i sats 13.1.

Följsats: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ och $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Triangel olikhet. Ur $f(x) \leq |f(x)|$ fås

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx; \quad (a \leq b).$$

Träning med trapp
fm: övn 13.1 $\rightarrow$ 13.7

Hela Kap 13 är en förberedelse till Analyserns huvudsats, som kopplar ihop kap 12 och 13 (och 10:an).

Medelvärdesatsen f kontinuerlig på $[a, b] \Rightarrow$ det finns minst en punkt ξ i $[a, b]$ sådan att $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a)$

Bevis f kont. $[a, b]$ begränsad $\Rightarrow \exists m \leq f(x) \leq M$ för alla x på $[a, b]$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) = \int_a^b M dx$$

Dämed $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$, men f antar alla värden mellan m och M , så för något ξ gäller att $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$