Detaljer i sista exemplet på föreläsning 19 nov

November 19, 2019

Vi söker en primitiv till

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 8x - 3}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

Först, polynomdivision. Man får ett polynom plus en ny rationell funktion där nämnaren har större grad än täljaren:

$$f(x) = 1 + \frac{3x^2 + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

Sedan, faktorisera nämnaren. En rot i nämnaren är $x = 1$, eftersom $1 - 5 + 8 - 4 = 0$, övriga rötter fås efter polynomdivision i själva nämnaren. Slutligen:

$$f(x) = 1 + \frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Enligt partialbråkuppdelningsreceptet, splittrar vi den nya rationella funktionen i delsummor:

$$f(x) = 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

konstanterna fås efter att ha skrivit om delsummorna tillbaka som ett bråk:

$$\frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

vilket i sin tur blir:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x-2)^2} &= \frac{A(x^2 - 4x + 4) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} \\
&= \frac{x^2(A+B) + x(-4A - 3B + C) + (4A + 2B - C)}{(x-1)(x-2)^2}
\end{aligned}$$

därmed har vi att $A + B = 3$, $C - 4A - 3B = 0$ samt $4A + 2B - C = 1$. Vi kan kostatera att lösningen blir $A = 4$, $B = -1$ och $C = 13$ genom direkt substitution i ekvationerna. Därmed:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{13}{(x-2)^2}$$

och primitivfkuntionen kan skrivas som (D är en godtycklig konstant):

$$F(x) = x + 4\ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{13}{x-2} + D$$