Fler rotuttryck från kap 12

November 18, 2019

Uppgift 12.43

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}+x}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}dx = \int \frac{x^2+2+x^2-2x\sqrt{x^2+2}}{2}dx = \int \left(x^2+1-x\sqrt{x^2+2}\right)dx.$$

Sista termen kan integreras med substitutionen $u = x^2+2$ och blir $\int x\sqrt{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}} + C.$

Svar: $\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}} + C$

Uppgift 12.40a

Finn en primitivfunktion till $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Argumenten saknar reella rötter, så vi kvadratkompletterar: 1 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}}$ Substitution $t = x+2$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

Ny substitution: $u = t+\sqrt{t^2+1}$. Vi får att $(u-t)^2 = t^2+1$ och $t = \frac{u^2-1}{2u}$. Därefter blir $dt = \frac{u^2+1}{2u^2}du$ och primitivet blir:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \left(\frac{2u}{u^2+1}\right)\frac{u^2+1}{2u^2}du = \int \frac{1}{2u}du = \ln|u| + C$$

Slutligen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+4x+5}}\,dx = ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C$$