

$$\begin{aligned}
 \text{Ex 6: } \int e^x \sin 2x \, dx &= \overset{\uparrow}{f} \frac{-1}{2} \cos 2x e^x - \int \frac{-1}{2} \cos 2x e^x \, dx = \text{LV 3-4} \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2x e^x + \frac{1}{2} \int \overset{\uparrow}{f} \cos 2x e^x \, dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2x e^x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x e^x - \int \frac{1}{2} \sin 2x e^x \, dx \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{dvs: } \int e^x \sin 2x \, dx = e^x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x \, dx$$

$\swarrow$ samma uttryck $\searrow$

$$\frac{5}{4} \int e^x \sin 2x \, dx = e^x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$$

$$\int e^x \sin 2x \, dx = e^x \left(\frac{1}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x \right) + C.$$

Ett antal integraler kan grupperas under vissa standardprocedurer

① Rationella funktioner: $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$; p, q polynom

Gör polynomdivisionen först: $\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$
 där $\text{grad } r < \text{grad } q$.

(Kommer från faktorsatsen mm: $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$)

$k(x)$: polynom. $\rightarrow$ Enkel primitiv.

För $r(x)/q(x)$ och $\text{grad } r < \text{grad } q$ finns det en speciell teknik:

PARTIALBRÄK SUPPDELNING

Går ut på att skriva om kvoten som en summa av flera bråk med enkel primitiv.

Vi arbetar upp metoden med exempel

$$12.23.b \quad \int \frac{x+13}{(x^2-4x-5)} dx = \int \frac{x+13}{(x-5)(x+1)} dx$$

$$\frac{x+13}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} \quad \text{Målet är att bestämma } \underline{\underline{A \text{ och } B}}$$

$$\text{Skivsom ett bråk:} \quad = \frac{A(x+1) + B(x-5)}{(x-5)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A-5B}{(x-5)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-5B=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B=-2 \\ A=3 \end{matrix}$$

$$\int \frac{x+13}{x^2-4x-5} dx = \int \left(\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \right) dx = 3 \ln|x-5| - 2 \ln|x+1| + C$$

$$= \ln \left(\frac{|x-5|^3}{|x+1|^2} \right) + C$$

$$12.24.b: \int \frac{3x+11}{(x+2)^2} dx. \quad \frac{3x+11}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow A=3, B=5$$

$$\int \frac{3x+11}{(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{5}{(x+2)^2} \right) dx = 3 \ln|x+2| - \frac{5}{x+2} + C$$

$$12.27.c \quad \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx = \left(\text{Inga reella rötter. Kvadratkomplettera!} \right)$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+4} dx = \left[\begin{matrix} t=x-2 \\ dt=dx \end{matrix} \right] = \int \frac{1}{4+t^2} dt =$$

~~Wolfram Alpha~~

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+t^2/4} dt \left[\begin{matrix} z=t/2 \\ dz=1/2 dt \end{matrix} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{2 dz}{1+z^2} =$$

$$\frac{1}{2} \arctan z + C = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x-2}{2} \right) + C.$$

Rationella funktioner

① gör polynom division

② $\frac{f(x)}{g(x)}$: • Faktorisera $g(x)$ → termer av typen $\frac{A}{x-x_0}$, $\frac{Bx+C}{x^2+ax+b}$ Eller högre potenser om faktorens har multiplicitet
se sid 291 i boken.• Bestäm koefficienterna A, B, C , mm.

$$\bullet \frac{A}{x-x_0} \rightarrow A \ln|x-x_0| + C_1$$

$$\bullet \frac{B(x-x_1)}{(x-x_1)^2+\alpha} \rightarrow \frac{B}{2} \ln(\alpha + (x-x_1)^2) + C_2$$

$$\bullet \frac{C}{(x-x_1)^2+1} \rightarrow C \arctan(x-x_1) + C_3$$

På vägen kan omskrivningar och variabelbyten behövas

Läs s. 292 → 297

$$\text{Ex: } f(x) = \frac{x^3-2x^2+8x-3}{x^3-5x^2+8x-4} = 1 + \frac{3x^2+1}{x^3-5x^2+8x-4} = 1 + \frac{3x^2+1}{(x-1)(x-2)^2} =$$

$$= 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A=4, \quad B=-1, \quad C=13$$

$$\int f(x) dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{13}{(x-2)^2} \right) dx = x + 4 \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{13}{x-2} + D$$

————— 0 —————