

Ch12 Primitiva funktioner

Def: F primitiv till $f \Leftrightarrow \boxed{F' = f.}$
 ($\forall x \in I$)

Sats: F primitiv till $f \Rightarrow$ Alla primitiva funktioner till f är av typen $G = F + C$; C konstant.

Primitiva f. betecknas med: $\int f(x) dx.$ (samtliga, hela mängden)
 Ex: $\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C}$

Varför $\int$? Vänta till kap 13 för mer detaljer.

kallas INTEGRAL av f . f kallas INTEGRAND

Uten derivations tabell kan man skapa en primitiv tabell genom att läsa tabellen åt andra hållet.
 Jfr: S.281 och S.219. (kallas SATS 2).

Viktiga exempel:

Vi vet att $(\ln|x|)' = 1/x$ därmed $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

Detta förekommer i flera övningsuppgifter:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

$$\begin{aligned} \text{bevis: } \left(\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + a}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \end{aligned}$$

→ Vi gör en tabell som den på S. 281. ←

Beräkning av primitiva funktioner.

Vissa regler kan följas upp från derivatan:

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Ex: $\int \frac{x^3 + x + 3}{x^2} dx = \int \left(x + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{3}{x} + C$

Variabelsubstitution är arigsidan av derivatans kedjeregel:

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C}$$

där $F(t)$ är en primitiv till $f(t)$.

Bevis: $(F(g(x)) + C)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Hur används det? Ibland "ser" man substitutionen direkt (detta kräver träning i någon form).

Ex (boken) $\int 2x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dt = 2x dx \end{array} \right| =$
 $= \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$

När vi gör en substitution får inte blandade uttryck förekomma med både "x" och "t".

Ex 1: $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \end{array} \right] dt = -\sin x dx = \int -\frac{dt}{t} =$
 $= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

Ex 2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \rightarrow x = t^2 \\ \rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{t(1+t^2)} = \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \arctan t + C$
 $= 2 \arctan \sqrt{x} + C$

Produktregel i derivatan har som motpart

PARTIALINTEGRATION. om $F' = f$ så gäller

$$(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g' = f \cdot g + F \cdot g' \quad \text{dvs att}$$

$$\int f \cdot g \, dx = \int (F \cdot g)' \, dx - \int F \cdot g' \, dx \quad \text{dvs}$$

$$\boxed{\int f \cdot g \, dx = F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx}$$

Man lär sig detta genom exempel (dvs. träning)

$$\text{Ex 1: } \int \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{e^x} \, dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 \, dx = (x-1)e^x + C$$

$$\begin{aligned} \text{Ex 2: } \int \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{e^x} \, dx &= e^x x^2 - \int e^x 2x \, dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = [x^2 - 2(x-1)] e^x + C \end{aligned}$$

Kan göras upprepade ggr.

$$\begin{aligned} \text{Ex 3: } \int x^3 e^{x^2} \, dx &= \int \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot x^2 e^{x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int t e^t \, dt \underset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2} (t-1)e^t + C = \frac{1}{2} (x^2-1)e^{x^2} + C \end{aligned}$$

Kan kombineras med andra metoder

$$\text{Ex 4: } \int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\ln x} \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \underline{x(\ln x - 1) + C.}$$

$$\text{Ex 5: } \int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\arctan x} \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} \ln|1+t| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\therefore \int \arctan x \, dx = \underline{x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ex 6: } \int e^x \sin 2x \, dx &= \overset{\uparrow}{f} \frac{-1}{2} \cos 2x e^x - \int \frac{-1}{2} \cos 2x e^x \, dx = \text{LV 3-4} \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2x e^x + \frac{1}{2} \int \overset{\uparrow}{f} \cos 2x e^x \, dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2x e^x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x e^x - \int \frac{1}{2} \sin 2x e^x \, dx \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{LVS: } \int e^x \sin 2x \, dx = e^x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x \, dx$$

$\swarrow$ samma uttryck $\searrow$

$$\frac{5}{4} \int e^x \sin 2x \, dx = e^x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$$

$$\int e^x \sin 2x \, dx = e^x \left(\frac{1}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x \right) + C.$$

Ett antal integraler kan grupperas under vissa standardprocedurer

① Rationella funktioner: $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$; p, q polynom

Gör polynomdivisionen först: $\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$
 där $\text{grad } r < \text{grad } q$.

(kommer från faktorsatsen mm: $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$)

$k(x)$: polynom. $\rightarrow$ Enkel primitiv.

För $r(x)/q(x)$ och $\text{grad } r < \text{grad } q$ finns det en speciell teknik:

PARTIALBRÅKSUPPDELNING

går ut på att skriva om kvoten som en summa av flera bråk med enkel primitiv.