

Notera: $e^{i\theta} e^{i\theta} = e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$

Också:

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Kallas De Moirres formel

Också: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Eulers formel.

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta). \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}: e^z = e^{(a+ib)} = e^a \cdot e^{ib}$

Komplexa polynom: $p_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$.

Nollställe till $p_1(z)$: $c_0 + c_1 z = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{c_0}{c_1} = -\frac{c_0 \bar{c}_1}{|c_1 \bar{c}_1|}$

Andra gradsekv.

Lös $z^2 = -3 + 4i$

1): $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\therefore x^2 - y^2 = -3$

2) $|z|^2 = x^2 + y^2$

$2xy = 4$

$x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Från (1) och (3) vi får: $2x^2 = 5 - 3 = 2 \rightarrow x^2 = 1$
 $2y^2 = 5 + 3 = 8 \rightarrow y^2 = 2$

Från (2): x & y har samma tecken!

$\therefore x = 1, y = 2$ och $x = -1, y = -2$.

Svar: $\boxed{z_1 = 1 + 2i, z_2 = -1 - 2i}$

Lös $z^2 + (2-2i)z - 6i-3=0$

pg metoden hjälper inte. Man får en rot med komplexa tal.

kvadratkomplettering! $\boxed{W = z + 1-i}$

$$W^2 = z^2 + 2(1-i)z + (1-i)^2 = z^2 + (2-2i)z + 2i$$

$$\rightarrow W^2 - 4i + 3 = 0 \text{ lös } w^2 = 3+4i$$

$$w = a+ib.$$

$$w^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = +4 \end{array} \right.$$

$$2ab = +4$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a^2 = 8 \rightarrow a^2 = 4 \\ 2b^2 = 2 \rightarrow b^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$2b^2 = 2 \rightarrow b^2 = 1$$

a & b har ~~positiva~~ tecken
samma

$$= 1+2i.$$

$$w_1 = 2+i; w_2 = -(2+i) \rightarrow z_1 = 2+i - (1-i)$$

$$z_2 = -2-i - (1-i) = -3$$

Binomiska ekvationer: $\boxed{z^n = u}$

Metod: Skriv z och u i polär form.

$$|z|^n e^{in\theta} = |u| e^{i\varphi} \rightarrow |z| = \sqrt[n]{|u|} \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}; 0 \leq k \leq n-1$$

Ex: Lös $z^4 = -4$

$$|z|^4 e^{i4\theta} = 4 e^{i\pi}$$

obs: $|u|, |z|$ ALDRIG NEGATIVA

$$|z| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$4\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = \sqrt{2} (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = 1+i$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i3\pi/4} = -1+i$$

$$z_3 = \sqrt{2} e^{i5\pi/4} = -(1+i)$$

$$z_4 = \sqrt{2} e^{i7\pi/4} = 1-i$$

* Algebras fundamental sats

Varje icke-konstant komplext polynom har minst ett (komplext) nollställe. (Inget bevis i denna kurs).

* Sats 6.3: Ett polynom $P_n(z)$, $n \geq 1$ har precis n -st nollställen (med multiplicitet räknad) och kan faktoriseras som: $P_n(z) = a_n (z-z_1) \dots (z-z_n)$.

Bevis: För komplexa polynom gäller polynomdivisionen och faktorsatsen precis som i Kap 2

$$\therefore P_n(z) = a_n (z-z_1) q_{n-1}(z)$$

men $q_{n-1}(z)$ är också ett polynom $\Rightarrow P_n(z) = a_n (z-z_1) \dots (z-z_n)$

Sats: $P_n(z)$ med reella koefficienter.

Om α är ett nollställe till $P_n(z)$ så är även $\bar{\alpha}$ ett nollställe

$$P_n(\alpha) = 0 \quad \text{men} \quad \overline{P_n(\alpha)} = P_n(\bar{\alpha}) = 0 \quad \text{dus} \quad P_n(\bar{\alpha}) = 0.$$

$\rightarrow$ Faktorisera $p(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15$ givet att

~~men~~ $z_1 = 2+i$ är en rot.

$\rightarrow$ Då är $z_2 = 2-i$ en rot och $p(z) = (z - 2 - i)(z - 2 + i) q_2(z)$
 $(z-2)^2 + 1$

$$\text{Polynom div: } p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 - 4z + 3)$$

$$(z-3)(z-1)$$

$\rightarrow$ Sats 6.5: Reella polynom kan faktoriseras fullständigt med faktorer av grad 1 eller 2.