

Komplexa tal.

Ex. $3x-2=0$ kan inte lösas med ~~heltal~~ heltal
 $\rightarrow$ Vi utvidgar från heltal till rationella tal.

P.SS. $x^2+2x+5=0$ lös. $(x+1)^2+4=0$

kan inte lösas med reelltal.

• Vi kallar i lösningarna till $x^2+1=0$.

Komplex tal: $z = a+bi$ $a: \operatorname{Re}(z)$ Real del
 $b: \operatorname{Im}(z)$ Imaginär del
 i : imaginära enheten. $i = \sqrt{-1}$ eller $i^2 = -1$.

Komplexa tal är inte bara till för kvadratiske ekvationer! De är praktiska & användbara i flera sammanhang.

• Summa: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

• Produkt: $(a+bi) \cdot (c+di) = ac + i^2 bd + adi + bci$
 $= (ac-bd) + (ad+bc)i$

• Komplexkonjugat $\bar{z}$

(Def): $z = a+bi \Leftrightarrow \bar{z} = a-bi$

Räkneregler: $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$
 $\overline{uv} = \bar{u} \cdot \bar{v}$

• Absolut belopp $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$

Regler: $|z+w| \leq |z| + |w|$
 $|zw| = |z| |w|$
 $|z|^2 = z \bar{z}$

Komplexa tal planét. Vi ser exempel (s. 85).

Ex. Rita $-1-i$ och $2i$ i det komplexa planet.

Ex. Skriv $(1+i) + (-3-2i)$ som $a+bi$ och rita

Skriv $(1-i)^2$ och $(1-i)^4$ som $a+bi$ och rita

$$(1+i) - 3 - 2i = -2 - i$$

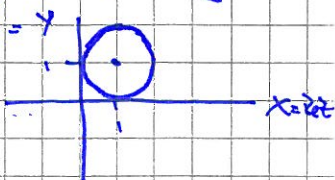
$$(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = 1 + i^2 - i - i = -2i$$

$$(1-i)^4 = (1-i)^2 \cdot (1-i)^2 = -4$$

Lös
$$\begin{cases} 2\bar{z} - z = 3+i \\ 2(a-ib) - (a+ib) = a-3ib \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} a=3 \\ b=-1/3 \end{matrix} \right\} z = 3 - \frac{1}{3}i.$$

Maakna alla komplexa tal z : $|z - 1 - i| \leq 1$.

$$|z - (1+i)| \leq 1 \Rightarrow |z - (1+i)|^2 \leq 1 \quad \text{Låt } z = x+iy$$

$$\therefore |x-1+i(y-1)|^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$$


En cirkel med radien 1 och centrum i $1+i$.

Många avseenden betecknar komplexa tal som vektorer i planet (Lin Alg).

Kvot: Vad är $z = \frac{2-3i}{3+i}$? Ett komplext tal är

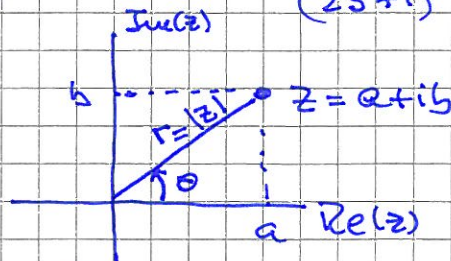
färdigt förenklad och redo att ritas upp värdet uttrycks med bara i

$$\begin{aligned} \frac{u}{w} &= \frac{2-3i}{3+i} = \frac{u \bar{w}}{w \bar{w}} = \frac{(2-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-3-9i-2i}{9+1} = \\ &= \frac{3}{10} - \frac{11}{10}i \end{aligned}$$

Ex: Beräkna $|z|$ då $z = \frac{(1+2i)(7+\sqrt{3}i)^2}{(5+i)^2}$.

$$|z| = \frac{|1+2i| \cdot |7+\sqrt{3}i|^2}{|5+i|^2} = \frac{\sqrt{1+4} \cdot (49+3)}{(25+1)} = 2\sqrt{5} \quad \text{LVF. 3}$$

Polär form. Öreellt



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$a = |z| \cos \theta$$

$$b = |z| \sin \theta$$

$$z = a + ib = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$(|z|, \theta) \leftrightarrow (a, b)$$

θ kallas argument, dvs $\arg z = \theta$.

Efter Euler, rår för symbolen. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\rightarrow z = |z| e^{i\theta} \quad (\text{Polär form}).$$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = \sqrt{(\cos + i \sin)(\cos - i \sin)} \\ = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = e^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + i(\cos \theta \sin \varphi + \cos \varphi \sin \theta) \\ = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) = e^{i(\theta + \varphi)}$$

Ex 24: Bestäm $\arg z$ för $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{(2-2i)^3}$ (skriv z i polär form)

$$1+i\sqrt{3} = \sqrt{1+3} e^{i\pi/3}$$

Vad för?

$$1+i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \\ \cos \pi/3 \quad \sin \pi/3$$

$$2-2i = 2(1-i) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\cos(-\pi/4) \quad \sin(-\pi/4)$$

$$2-2i = 2\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$z = \frac{2 e^{i\pi/3}}{(2\sqrt{2})^3 e^{-i3\pi/4}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} e^{i13\pi/12}$$

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi + 9\pi}{12} \right)$$

$$\arg z = 13\pi/12 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Notera: $e^{i\theta} e^{i\theta} = e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$

Också:

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Kallas De Moirres formel.

Också: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Eulers formel.

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \cos^2\theta &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{2^2} = \frac{1}{4}(e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta). \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}: e^z = e^{(a+ib)} = e^a \cdot e^{ib}$

Komplexa polynom: $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$.

Nollställe till $p_1(z)$: $c_0 + c_1 z = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{c_0}{c_1} = -\frac{c_0 \bar{c}_1}{|c_1 \bar{c}_1|}$

Andragrads ekv.

Lös $z^2 = -3 + 4i$

1): $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\therefore x^2 - y^2 = -3$

2) $|z|^2 = x^2 + y^2$

$2xy = 4$

$x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Från (1) och (3) vi får: $2x^2 = 5 - 3 = 2 \rightarrow x^2 = 1$
 $2y^2 = 5 + 3 = 8 \rightarrow y^2 = 2$

Från (2): x & y har samma tecken!

$\therefore x = 1, y = 2$ och $x = -1, y = -2$.

Svar: $\boxed{z_1 = 1 + 2i, z_2 = -1 - 2i}$