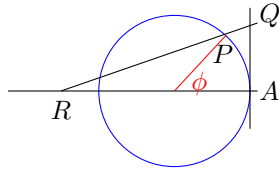


Övn 11.41

15th November 2019

A och P är två punkter på en cirkel med radie r . Punkten Q på cirkelns tangent i A definieras så att AQ har samma längd som bågen AP . Linjen genom P och Q skär den förlängda diametern på A i punkten R . Bestäm gränsläget för R då $P \rightarrow A$.



Vi mäter vinkeln i radianer. Bågen för en given vinkel har då längden $r\phi$. Punkten P har koordinater $(r \cos \phi, r \sin \phi)$ och Q är $(r, r\phi)$. Linjen genom P och Q kan skrivas som $y(x) = r \sin \phi + \frac{r\phi - r \sin \phi}{r - r \cos \phi} (x - r \cos \phi)$. Notera att för $x = r$, är $y(r) = r\phi$, dvs att linjen passerar punkten Q och för $x = r \cos \phi$ är $y(r \cos \phi) = r \sin \phi$, dvs punkten P . Förenkla i fortsättningen uttrycket för $y(x)$ genom att förkorta bort r i bråket.

Punkten R ligger på samma linje, men har en x -koordinat (som vi kallar $R(\phi)$ eftersom varje vinkel ϕ har sitt eget R -värde) sådan att $y(R(\phi)) = 0$. Därmed är $R(\phi) = r \cos \phi - r \sin \phi \frac{1 - \cos \phi}{\phi - \sin \phi}$. Problemet frågar efter $\lim_{\phi \rightarrow 0} R(\phi)$.

Observera att $\lim_{\phi \rightarrow 0} R(\phi) = \lim_{\phi \rightarrow 0} r \left(\cos \phi - \sin \phi \frac{1 - \cos \phi}{\phi - \sin \phi} \right)$. Eftersom r är konstant fokuserar vi på parentesen och för gränsvärdet använder vi oss av McLaurinutvecklingar. Vi gör det i flera steg. Notera först att

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \phi}{\phi - \sin \phi} &= \frac{1 - \left(1 - \frac{\phi^2}{2} + \phi^4 B_1(\phi)\right)}{\phi - \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} + \phi^5 B_2(\phi)\right)} \\ &= \frac{\frac{\phi^2}{2} - \phi^4 B_1(\phi)}{\frac{\phi^3}{6} - \phi^5 B_2(\phi)}. \end{aligned}$$

v.g. vänd!

Därmed gäller det att

$$\begin{aligned}
\cos \phi - \sin \phi \frac{1 - \cos \phi}{\phi - \sin \phi} &= 1 - \frac{\phi^2}{2} + \phi^4 B_1(\phi) - \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} + \phi^5 B_2(\phi) \right) \frac{\frac{\phi^2}{2} - \phi^4 B_1(\phi)}{\frac{\phi^3}{6} - \phi^5 B_2(\phi)} \\
&= 1 - \frac{\phi^2}{2} + \phi^4 B_1(\phi) - \left(1 - \frac{\phi^2}{6} + \phi^4 B_2(\phi) \right) \frac{\frac{\phi^3}{2} - \phi^5 B_1(\phi)}{\frac{\phi^3}{6} - \phi^5 B_2(\phi)} \\
&= 1 - \frac{\phi^2}{2} + \phi^4 B_1(\phi) - \left(1 - \frac{\phi^2}{6} + \phi^4 B_2(\phi) \right) \frac{\frac{1}{2} - \phi^2 B_1(\phi)}{\frac{1}{6} - \phi^2 B_2(\phi)}
\end{aligned}$$

I andra radet har vi flyttat en ϕ -potens från McLaurinutvecklingen av $\sin \phi$ till bråkets täljare.

Vid gränsvärdet då $\phi \rightarrow 0$ försvinner alla ϕ -potenser och vi får

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} R(\phi) = r \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} \right) = -2r, \text{ dvs på avståndet } 3r \text{ relativt till punkten } A.$$