

Övn 11.7

13th November 2019

Visa att

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq 8 \frac{x^3}{3} \quad \text{för } |x| \leq \frac{1}{2}$$

Vi använder McLaurins utveckling:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_3(x) \quad \text{där } R_3(x) = \frac{2}{(1+\theta x)^3} \frac{x^3}{3!}$$

Till skillnad från andra tal vi har räknat tidigare, kan i detta fall x vara negativ, nämligen $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ och på samma sätt är $-\frac{1}{2} < \theta x < \frac{1}{2}$ alltså har vi att $\frac{1}{2} \leq 1+\theta x \leq \frac{3}{2}$ för $|x| \leq \frac{1}{2}$, och därför blir det största värdet som $\frac{1}{(1+\theta x)^3}$ kan ha den som fås för minsta möjliga θx , dvs att

$$|R_3(x)| \leq \frac{2}{(\frac{1}{2})^3} \frac{|x|^3}{3!} = \frac{8}{3} |x|^3$$