

McLaurin series.

om för någon x gäller att $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$

kommer $P_n(x)$ att konvergera mot $f(x)$

Div. $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ och därmed

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(x) + R_{n+1}(x)) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

McLaurin serie. En intressant fråga är för vilka x är en viss serie konvergent?

→ Se tabellen i sid. 272 ←

$$\text{Ex 1 } e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \cancel{(\text{rest})} e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\hookrightarrow R_{n+1}(x) \rightarrow$

Ta en fix x . $e^{\theta x}$, vad det nu blir, är ett tal. om $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ kommer det att bero på $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

För $x > 0$ är det lätt att bevisa att $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Välj ett heltal $m > x$ och $n > m$.

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^m}{m!} \cdot \underbrace{\frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2} \cdots \frac{x}{n+1}}_{< 1} \leq C \frac{x}{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

↑
konstant
C oersett n

$\Rightarrow \forall x$ konvergera serien $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\text{Ex 2: } \left. \begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= P_n(x) + x^{n+1} B(x) \end{aligned} \right\} \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \underline{\underline{-1 < x < 1}}$$

Trigonometri, Komplexa tal & McLaurin serier

Låt oss acceptera utan bevis att serien e^x transporterar konvergensten till komplexa tal.

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

Reella
i till jämma potens: ± 1
i till udda potens: $\pm i$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{k=0 \\ \text{jämma}}} \frac{(ix)^k}{k!} + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{udda}}} \frac{(ix)^k}{k!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \cos x + i \sin x
 \end{aligned}$$

Taylor utveckling

Sats 11.4 s. 275.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \text{för } a \leq \beta \leq x.$$

(särskilt för $0 \leq \beta \leq |x-a|$)

Beweis: för $t = x - a$ låt $g(t) = f(a+t) = f(x)$

g :s McLaurin är f :s TAYLOR.

Uppg 11.3 (hela!) Vi har redan gjort många delmoment

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

a) $P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

b) Rita figur (se datorn)

c) $R_2 = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x$

i Lagranges form

$$R_2(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(1+\theta x)^{3/2}} \frac{x^2}{2!}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}; \quad f'(0) = 1/2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}; \quad f''(0) = -1/4$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}; \quad f'''(0) = 3/8$$

d) $|R_2(x)| \leq \frac{x^2}{8}$ för $x > 0$ ($\Rightarrow \frac{1}{(1+\theta x)^{3/2}} \leq 1$)

e) $|R_2(x)| \leq \frac{(0.1)^2}{8} = 0.00125 < 0.005$

$$P_1(0.1) = 1.05$$

$$\sqrt{1+0.1} = 1.0488088 \dots$$

f) Vi vill att $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ i $0 \leq x < \alpha$ med fel $\leq 5 \times 10^{-4}$. Ange α .

Vi behöver α sådan att

$$|R_2(x)| \leq 0.0005 \quad \text{för } 0 \leq x < \alpha.$$

Som sagt, $|R_2(x)| \leq \frac{x^2}{8}$ och skall vara ≤ 0.0005

$$\rightarrow x^2 = 8 \cdot 0.0005 = 0.004 \rightarrow x = 0.063 \dots$$

$$\therefore \text{för } 0 \leq x < 0.063 \text{ så är } |R_2(x)| \leq 0.0005$$

g) $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$

h) Rita igen med $P_2(x)$ (se fil)

i) $R_3(x) = \frac{3}{8} \frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}} \frac{x^3}{6} = \frac{1}{16} \frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/2}} \leq \frac{x^3}{16}$

k) $|R_3(x)| \leq \frac{10^{-3}}{16} =$ för $0 \leq x \leq 0.1$

$$\sqrt{1+0.08} = 1.03923048 \dots$$

$$P_2(0.08) = 1.0392$$

11.9 Visa att $|\tan x - x| \leq 3|x|^3$ för $|x| \leq \pi/4$

$$f(x) = \tan x ; \quad f(0) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} ; \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2 \cos^{-3} x \cdot (-\sin x) ; \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2(\cos^{-2} x + 3 \cos^{-4} x \sin^2 x) ; \quad f'''(0) = 2$$

$$P_2(x) = x ; \quad R_3(x) = \frac{x^3}{6} \cdot \frac{2}{\cos^2 0x} (1 + 3 \tan^2 0x)$$

"största" uppskattning för $R_3(x)$ fås så här

$$|R_3(x)| \leq \frac{|x|^3}{3} \frac{1}{\cos^2 \pi/4} (1 + 3 \tan^2 \pi/4) = \frac{8}{3} |x|^3 \leq 9|x|^3.$$

$$11.23. \frac{1}{x} \left[(1+x)^{1/x} - e \right] = \frac{1}{x} \left(e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e \right) \quad \text{McLaurin:}$$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + x^3 B(x) \right) = 1 - \frac{x}{2} + x^2 B(x)$$

$$e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + x^2 B(x)} = e \left(1 - \frac{x}{2} + x^2 B(x) \right)$$

$$\frac{1}{x} \left((1+x)^{1/x} - e \right) = \frac{e}{x} \left(1 - \frac{x}{2} + x^2 B(x) - 1 \right) = e \left(-\frac{1}{2} + x B(x) \right)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -e/2.$$

11.41. Se separat blad