

McLaurin & Taylorutvecklingar.

Hur bra kan en komplicerad funktion approximeras med polynom?

Exempel: $f(x) = \ln(1+x)$. Vi studerar $x \in [-0.1, 0.1]$.

$P_1(x)$ = tangent till $f(x)$ vid $x=0$.

$$y_T - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{dvs}$$

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{i detta fall}$$

$$x=0. \quad f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(0) = \left[\frac{1}{1+x} \right]_{x=0} = 1$$

$$\therefore \boxed{P_1(x) = x}$$

$f(x) - P_1(x)$ är monoton $\therefore$ största felet finns vid randen

$$\ln(1+0.1) = 0.0953; \quad \ln(1-0.1) = -0.1053 \quad \text{max } 5\% \text{ fel}$$

Vi försöker med $P_2(x)$: P_2 , P_2' och P_2'' vid $x=0$ är samma som för f .

$$P_2(x) = a + bx + cx^2$$

$$P_2(0) = a = 0$$

$$P_2'(0) = b = 1$$

$$P_2''(0) = 2c = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_2(0) = a = 0 \\ P_2'(0) = b = 1 \\ P_2''(0) = 2c = -1 \end{array} \right\} \quad \boxed{P_2(x) = x - x^2/2}$$

$f(x) - P_2(x)$ är monoton $\rightarrow$ största felet vid randen

$$P_2(0.1) = 0.095; \quad P_2(-0.1) = -0.105 \quad \text{max } 0.3\% \text{ fel.}$$

<Se wxmaxima>

Fungerar lika bra för många "snälla" funktioner.

Def: ^(avordning) McLaurinpolynom till $f(x)$, en funktion som kan deriveras minst n -gånger i en omgivning av $x=0$.

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

$f(x) \neq P_n(x)$. Hur fel kan det bli?

LV2-2

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{Restterm.}$$

Sats: $f(x) \in C^{(n+1)}$ i en omgivning D av $x=0$.

$\forall x \in D$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$= P_n(x) + R_{n+1}(x) \quad (\text{kallas Lagrange restterm}).$$

$$\text{där } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{för något } 0 \leq \xi \leq x.$$

Beris: Ausu. 11.5 sid 276-277, genom medelvärdesatsen.

$$\text{Man skriver även } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \boxed{0 \leq \theta \leq 1}$$

Tillämpning 1: Narmevärden (approximationer)

Beräkna $\cos(0.75) \equiv \cos(3/4)$ med 3 korrekta decimaler

För 3 korrekta decimaler behövs att $R(x) \leq 0.0005$

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Varannan derivata är udda!!

$$P_1(x) = 1$$

Restterm.

$$P_2(x) = 1 - x^2/2$$

$$P_3(x) = 1 - x^2/2 + 0$$

$$P_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$$

$$P_5(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + 0$$

$$R_4(x) = \cos(\theta x) \frac{x^4}{24} \leq 1 \cdot \frac{3^4}{24 \cdot 4^4} \approx \text{för stor}$$

$$R_5(x) = -\cos(\theta x) \frac{x^6}{6!} \leq 1 \cdot \frac{3^6}{46 \cdot 6!} = \frac{3^4}{5 \cdot 2^{16}}$$

dvs. 0.00025 ok!

$$P_5(3/4) = P_4(3/4) = 1 - \frac{9}{32} + \frac{27}{2048} = \frac{1499}{2048} = 0.7319$$

Miniräknaren säger $\cos(3/4) = 0.7317$

Tillämpning 2: Funktionsuppskattning (det gör ingenjören hela tiden)

Visa att $\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8}\right) \right| \leq \frac{x^3}{16}$ (för $x \geq 0$)

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} (1+x)^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} (1+x)^{-5/2}$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8}$$

$$R_3(x) = \frac{3}{8} \frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}} \frac{x^3}{3!} = \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}$$

~~$\sqrt{1+x} = P_2(x) + R_3(x)$~~ $\sqrt{1+x} = P_2(x) + R_3(x) \therefore$

$$\sqrt{1+x} - P_2(x) = R_3(x) \text{ och } |\sqrt{1+x} - P_2(x)| = |R_3(x)| \leq \frac{x^3}{16}.$$

ibland behövs $R_n(x)$ med inte så mycket detalj.

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = B(x) x^{n+1}$$

↳ Begränsad

Detta i en omgivning av $x=0$.

Kan vara praktisk när man beräknar gränsvärden

$$\text{Ex: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 B(x)}{x} = 1.$$

$$\text{Ex } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1-x)}{1 - \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \left| \begin{array}{l} \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x) \\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^3 B_2(x) \\ \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^3 B_3(x) \end{array} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)}{1 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{x^2}{4} + x^3 (B_2 + B_3) \right)} = [\text{Några steg}] = -4.$$

McLaurius utveckling

Entydighets sats ~~och~~

Låt $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av $x=0$

$$\text{om } f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + x^{n+1} B(x)$$

då är detta en McLaurinutveckling av f . Dvs att

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \equiv P_n(x) \quad (\text{McLaurinpolynom av ord } n)$$

Beris: S. 264 Det går ut på att konstatera att VL & HL har samma värde & samma derivator upptill (n) vid $x=0$.

Ex: Bestäm $P_4(x)$ för $f(x) = \cos x^2$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B(t)$$

$$\text{Låt } t = x^2 \therefore \cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + x^8 B_1(x)$$

($P_4 = P_5 = P_6 = P_7$ i detta fall).

Utveckling av elementära funktioner: se sid 266.

< några exempel > : $\ln(1+x)$ och $\sin x$.

Utveckling av sammansatta fun: Använd entydighets satsen.

Ex: $\ln(1 + \sin x)$. Bestäm $P_2(x)$

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + t^3 B_1(t) \\ \sin x &= x + x^3 B_2(x) \end{aligned} \right\} t = \sin x \text{ ger}$$

$$\sin x = x + x^3 B_2(x)$$

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin x) &= \left(x + x^3 B_2 \right) - \frac{1}{2} (x + x^3 B_2)^2 + (x + x^3 B_2)^3 B_1 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^3 B(x) \end{aligned}$$

B grupperna B_1, B_2 och alla x -potenser som är 3:er högre

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$