

Uppgifter från kap 15

Mario Natiello

November 1, 2019

Ex 15.7 s 361 i boken

En bakteriekultur växer med en hastighet som är proportionellt till antalet bakterier vid varje tidpunkt. I början är antalet bakterier $4 \cdot 10^6$ och två timmar senare finns det 10^8 bakterier. Bestäm ett uttryck för antalet bakterier som funktion av tiden.

$$y' = ky, \quad y(0) = 4 \cdot 10^6, \quad y(2) = 10^8.$$

Integrerande faktormetoden på ekvationen $y' - ky = 0$. Faktorn framför y är konstanten $-k$, med primitiv $-kt$ och integrerande faktor e^{-kt} . Alltså

$$e^{-kt}y' - ke^{-kt}y = 0$$

Vänsterleden är en "full" derivata, dvs att $(e^{-kt}y)' = 0$. För att bestämma en primitiv, notera att när derivatan är noll så är primitivfunktionen konstant, dvs att $(e^{-kt}y) = C$ och på samma sätt $y(t) = Ce^{kt}$. Dessutom vet vi att

$$\begin{aligned} y(0) &= 4 \cdot 10^6 = Ce^0 \\ y(2) &= 10^8 = Ce^{k2} \end{aligned}$$

Därmed blir det $C = 4 \cdot 10^6$ och $k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{10^8}{4 \cdot 10^6} \right) = \frac{1}{2} \ln 25 = \ln 5$. Alltså är $y(t) = 4 \cdot 10^6 e^{t \ln 5} = 4 \cdot 10^6 5^t$. Rimlig för all framtid? Efter 5 dagar skulle mängden bakterier vara $y(120) = 4 \cdot 10^6 5^{120}$. Ofattbart stort.

Uppgift 15.2

Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' = \ln x$, $y(1) = 2$.

Vi har alltså $y' = \frac{\ln x}{x}$ och söker en primitivfunktion. Det gjorde vi i uppg. 12.11.d och får alltså att $y(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$. Begynnelsevillkoret ger att $y(1) = 2 = \frac{1}{2} (\ln 1)^2 + C$, alltså $C = 2$ och $y(x) = 2 + \frac{1}{2} (\ln x)^2$.

Uppgift 15.6

Lös begynnelsevärdesproblemet $(1+x^2)y' - xy = x$, $y(0) = 2$.

Vi skriver om till $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}$. Primitiven vi behöver är $-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, och integrerande faktorn blir $e^{-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Vidare har vi att $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y' - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}y = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ och då $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y \right)' = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. En primitiv blir: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$ och därefter blir $y(x) = C\sqrt{1+x^2} - 1$. Begynnelsevillkor ger $C = 3$ och $y(x) = 3\sqrt{1+x^2} - 1$.

15.8d Integrerande Faktor

Lös ekvationen $(x+1)(x+2)y' - y = 1$, $y(0) = 2$, $x > -1$.

Eftersom $x > -1$, kan vi skriva om ekvationen till $y' - \frac{1}{(x+1)(x+2)}y = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$. En primitiv till faktorn $-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ är $\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ (inga absolutbelopp behövs eftersom $x > -1$). Integrerande faktorn blir $G(x) = \frac{x+2}{x+1}$ och ekvationen skrivs om till $\frac{x+2}{x+1}y' - \frac{1}{(x+1)^2}y = \frac{1}{(x+1)^2}$. Vänsterled är en "full-derivata", dvs $\frac{x+2}{x+1}y' - \frac{1}{(x+1)^2}y = \left(\frac{x+2}{x+1}y\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$. Vi tar primitiv på båda sidor och får $\left(\frac{x+2}{x+1}y\right) = -\frac{1}{x+1} + C$, dvs $y(x) = -\frac{1}{x+2} + C\frac{x+1}{x+2}$. Begynnelsevillkor ger $y(0) = 2 = -\frac{1}{2} + \frac{C}{2}$, dvs $C = 5$. Dvs att $y(x) = \frac{5x+4}{x+2}$.

Uppgift 15.14

Strömmen I i en ERL-krets kan beskrivas med differentialekvationen $E = RI + L\frac{dI}{dt}$, när strömbrytaren sluts vid $t = 0$. Bestäm $I(t)$ om $I(0) = 0$.

Vi har att $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$. En primitiv till konstanten $\frac{R}{L}$ är $\frac{Rt}{L}$ och man får den integrerande faktorn $e^{\frac{Rt}{L}}$ med vilken vi skriver $e^{\frac{Rt}{L}}\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}e^{\frac{Rt}{L}}I = \frac{E}{L}e^{\frac{Rt}{L}}$. Det blir alltså $\left(e^{\frac{Rt}{L}}I\right)' = \frac{E}{L}e^{\frac{Rt}{L}}$. En primitiv fås genom $e^{\frac{Rt}{L}}I = \frac{E}{R}e^{\frac{Rt}{L}} + C$ och därmed blir $I = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{Rt}{L}}$. Begynnelsevillkor ger $I(0) = 0 = \frac{E}{R} + C$ och därmed $I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$. Strömmen växer exponentiellt från noll till det stationära värdet man känner till från Kirchoffs lagar.

15.16 Läsetal

En fabrik släppte under 40 års tid ut förorening i marken med det konstanta massflödet 3ton/år. Samtidigt avdunstade föroreningarna med ett flöde som var proportionellt mot mängden förorening i marken i varje ögonblick. Mätningar visar att avdunstningen var 5% per år. Hur stor massa förorening fanns enligt modellen då utsläppen upphörde? Anta att marken var ren när utsläppen började.

Låt $y(t)$ vara mängden förorening i marken vid tiden t . Massbalans ger att $y' = \text{in-ut}$, dvs $y' = 3 - 0.05y$ samt att $y(0) = 0$. Dvs att

$y' + 0.05y = 3$. Integrerande faktor blir $G(t) = e^{0.05t}$ och metoden ger att $e^{0.05t}y' + e^{0.05t}0.05y = 3e^{0.05t}$ eller $(e^{0.05t}y)' = 3e^{0.05t}$. Primitiv av detta ger $e^{0.05t}y(t) = \frac{3}{0.05}e^{0.05t} + C$ och därmed $y(t) = \frac{3}{0.05} + Ce^{-0.05t}$.

Begynnelsevillkor ger $y(0) = 0 = \frac{3}{0.05} + C$. Lösningen blir $y(t) = \frac{3}{0.05}(1 - e^{-0.05t})$. Efter 40år finns i marken $y(40) = 60(1 - e^{-2})$ ton föroreningar.

15.31 Variabelseparation

Modell för tillväxt av populationer: Låt antalet individer vid tiden t vara $y(t)$. Tillväxten styrs av differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ry(K - y)$, där r, K är positiva konstanter. Vid ett försök var $y(0) = 10^4$, $y(1) = 2 \cdot 10^4$ och 10^5 efter mycket lång tid. Vilka värden på r, K ges av försöket?

Vi separerar genom $\frac{dy}{y(K-y)} = rdt$ och integrerar bägge led: $\int \frac{dy}{y(K-y)} = \int rdt$ eller $\ln\left(\frac{y}{K-y}\right) = Krt + KC$.

Logaritmens argument är positiv så länge $0 < y < K$. Vi löser ekvationen för y och får $y(t) = \frac{AKe^{Krt}}{Ae^{Krt} + 1}$, där $A = e^{KC}$ är en konstant. Vi har ytterligare 3 villkor för att bestämma konstanterna: $y(0) = 10^4 = \frac{AK}{A+1}$, $y(1) = 2 \times 10^4 = \frac{AKe^{Kr}}{Ae^{Kr} + 1}$ samt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K = 10^5$. Efter lite arbete med algebran fås $K = 10^5$, $A = \frac{1}{9}$, $e^{Kr} = \frac{9}{4}$.
Svar: $y(t) = \frac{10^5 \left(\frac{9}{4}\right)^t}{9 + \left(\frac{9}{4}\right)^t}$.

15.37b Homogena 2a. ordningens diffekv med konstanta koefficienter

Lös ekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Karakteristiskt polynom $r^2 - 4r + 4 = 0$ dvs $(r - 2)^2 = 0$, dubbelt nollställe, allmänna lösningen är då $y(x) = (Ax + B)e^{2x}$.

15.37c Lös ekvationen $y'' - 6y' + 10y = 0$.

Karakteristiskt polynom $r^2 - 6r + 10 = 0$ dvs $(r - 3)^2 + 1 = 0$, med komplexa nollställena $r = 3 \pm i$. Lösningen är $y(x) = e^{3x} (A \cos x + B \sin x)$.

Partikulärlösning: Några exempel

15.45 Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $y'' + 4y = x^2$. Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0 = y'(0)$.

Lösningen är summan av en partikulärlösning $y_p(x)$ och den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y_h'' + 4y_h = 0$. Vi börjar med den homogena lösningen. Karakteristiskt polynom $r^2 + 4 = 0$, med rötter $r = \pm 2i$. Därmed $y_h(x) = D \cos 2x + F \sin 2x$. För partikulärlösningen noterar vi att högerleden är ett andragrads polynom och att koefficienten framför y i ekvationen inte är lika med noll. Då föreslår vi $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Därmed $y_p'(x) = 2Ax + B$ och $y_p''(x) = 2A$. Insättning i ekvationen ger $2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$.

Dvs att $4Ax^2 + 4Bx + 4C + 2A = x^2$. Detta ger $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{8}$, samt att $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$. Den allmänna lösningen till hela ekvationen är då $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + D \cos 2x + F \sin 2x$. Begynnelsevillkoren ger

att $y(0) = -\frac{1}{8} + D = 0$ och $y'(0) = 2F = 0$. Begynnelsevärdeproblemet har då den entydiga lösningen

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 2x.$$

15.55 Lös ekvationen $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \cos x$.

Vi börjar med den homogena lösningen, dvs $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0$. Karakteristiskt polynom är $r^2 - 3r + 2$, med nollställena $r = 1, 2$. Vi har att $y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}$. För partikulärlösning noterar vi att högerled kan skrivas som $e^{3x} \cos x = \Re(e^{(3+i)x})$. Vi söker då partikulär lösning till ekvationen $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = e^{(3+i)x}$ och sedan tar vi $\Re$. Högerled är en exponential så vi börjar med att föreslå $y_k(x) = z(x)e^{(3+i)x}$, där polynomet $z(x)$ återstår att bestämmas. Vi får först att $y_k'(x) = (z'(x) + (3+i)z(x))e^{(3+i)x}$ samt $y_k''(x) = (z''(x) + (6+2i)z'(x) + (8+6i)z(x))e^{(3+i)x}$. Efter insättning får vi att $(z''(x) + (6+2i)z'(x) + (8+6i)z(x))e^{(3+i)x} - 3(z'(x) + (3+i)z(x))e^{(3+i)x} + 2z(x)e^{(3+i)x} = e^{(3+i)x}$.

Efter förenkling får vi att $z''(x) + (3+2i)z'(x) + (1+3i)z(x) = 1$. Enklaste polynom som uppfyller ekvationen är $z(x) = \frac{1}{1+3i} = \frac{1}{10}(1-3i)$. Slutligen fås partikulärlösningen via

$$y_p(x) = \Re y_k(x) = \Re \left(\frac{1}{10}(1-3i)e^{(3+i)x} \right) = \frac{1}{10}e^{3x}(\cos x + 3 \sin x). \text{ Lösningen blir:}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{10}e^{3x}(\cos x + 3 \sin x) + Ae^x + Be^{2x}.$$